TRAITÉ DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

G. CAGNAC
E. RAMIS
J. COMMEAU

4

applications de l'analyse à la géométrie

MASSON & Cie

TRAITÉ

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

4

Applications
de l'Analyse à la Géométrie

TRAITÉ

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PAR

G. CAGNAC
Inspecteur général de l'Instruction Publique.

E. RAMIS
Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand.

J. COMMEAU
Professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Kléber, à Strasbourg.

4

Applications de l'Analyse à la Géométrie

MASSON et Cie ÉDITEURS
1971

TRAITÉ
DE
MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PAR

G. CAGNAC
Inspecteur général de l'Instruction publique

E. RAMIS
Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand

J. COMMEAU
Professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Kléber

1
Algèbre
Un volume in-8°, avec figures et exercices; broché.

2
Analyse
Un volume in-8°, avec figures et exercices; broché.

3
Géométrie
Un volume in-8°, avec figures et exercices; broché.

4
Applications de l'Analyse à la Géométrie
Un volume in-8°, avec figures et exercices; broché.

AVERTISSEMENT

CE « TRAITÉ DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES » *s'adresse aux étudiants des classes préparatoires aux grandes Écotes et aux étudiants qui suivent ta propédeutique M. P. en vue de t'acquisition du D. U. E. S.*

Pour chacune de ces deux catégories d'étudiants, t'ouvrage traite te programme des deux années d'études qui constituent te cycte comptet, sans distinguer systématiquement ce qui retève de ta première année; it va de soi que, dans ces conditions, tes débutants devront adapter t'étude de t'ouvrage à ta progression suivie par teur professeur.

Le tome I de notre Traité (Algèbre) *comprend essentiettement t'étude des structures atgébriques, des potynômes, des fractions rationnettes et équations atgébriques, enfin de t'atgèbre tinéaire.*

Le tome II (Analyse) *contient t'étude des fonctions réettes ou complexes d'une ou ptusieurs variabtes réettes, et ta partie théorique du programme de catcut différentiet et intégral.*

Le tome III (Géométrie) *comprend d'une part des comptéments d'Atgèbre (formes quadratiques et hermitiennes, introduction axiomatique des espaces affines, projectifs et euctidiens), d'autre part un exposé des apptications de t'Atgèbre à ta Géométrie.*

***

Le présent tome IV débute par un chapitre qui constitue ta suite naturette du tome II et qui comprend :

— des comptéments de topotogie, en protongement de t'étude des espaces métriques faite dans t'appendice I du tome II,

— une étude des fonctions vectoriettes d'une variabte réette.

Pour nous conformer, torsqu'its étaient convergents, aux vœux des directions de ptusieurs grandes Écotes, nous avons été amenés à comptéter notre exposé par t'introduction de notions nouvettes qui figureront vraisembtabtement dans une prochaine rédaction des programmes des ctasses préparatoires. C'est ainsi que, pour donner un exempte, nous avons introduit ta formute des accroissements finis pour une fonction vectoriette.

Les chapitres II à XI sont consacrés à l'étude de la géométrie différentielle (courbes et surfaces). Les intégrales multiples, les intégrales curvilignes et les intégrales de surfaces, ainsi que leurs applications à la mécanique (masses, centres d'inertie, moments d'inertie) sont traitées aux chapitres XII à XVI. Enfin l'analyse vectorielle fait l'objet du chapitre XVII.

***

Nous avons numéroté les paragraphes tome par tome, les renvois sont indiqués par référence au tome (en chiffres romains) et au paragraphe (en chiffres arabes); ceux d'entre eux qui ne sont pas précédés d'un chiffre romain sont relatifs au tome étudié.

Chaque paragraphe est divisé en sous-paragraphes par des numéros 1°, 2°, 3°, . . . ; chaque sous-paragraphe est divisé le cas échéant, par des lettres a), b), c)... *Nous espérons ainsi rendre service aux étudiants en marquant bien la séparation des idées.*

Les formules encadrées dans le texte sont d'un usage courant; il est indispensable, sinon de les savoir par cœur, du moins de pouvoir les retrouver très rapidement.

***

MM. Masson et Cie ainsi que leurs collaborateurs, ont consenti pour la mise à jour de notre ouvrage un effort dont nous sentons tout le prix; nous sommes heureux de les en remercier particulièrement.

LES AUTEURS.

N. B. Nous avons représenté les ensembles fondamentaux des naturels, entiers, rationnels, réels, complexes, par les lettres

N, Z, Q, R, C.

Pour éviter des confusions, en particulier si un texte appelle les lettres précédentes à recevoir une autre signification, on pourra représenter ces ensembles par les symboles

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

La Loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que les analyses et courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reprodution intégrale, ou partielle, faites sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

© 1971, par MASSON et Cie, Paris

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

Imprimé en France

CHAPITRE PREMIER

COMPLÉMENTS D'ANALYSE

I. COMPLÉMENTS DE TOPOLOGIE SUR LES ESPACES MÉTRIQUES

1. ***Notion de limite.*** — 1° DÉFINITION. — **Soit f une application d'une partie $\mathfrak{D}$ d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (F, δ); soit A un point de E adhérent à $\mathfrak{D}$ et L un point de F. On dit que f admet L pour limite au point A et on écrit** $L = \lim_{\substack{M \to A \\ M \in \mathfrak{D} - \{A\}}} f(M)$ **quand**

$$(1)\quad \forall \varepsilon > 0,\quad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \begin{pmatrix} M \in \mathfrak{D} \\ 0 < d(A, M) < \alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad \delta(L, f(M)) < \varepsilon,$$

c'est-à-dire quand l'application φ de $\mathfrak{D} \cup \{A\}$ dans F déterminée par

$$\varphi(A) = L; \qquad \varphi(M) = f(M) \quad \text{si} \quad M \in \mathfrak{D} - \{A\},$$

est continue au point A, (II, 285).

REMARQUE I. — Quand il y a risque d'ambiguïté, on précise que L est la limite de f au point A, *relativement à* $\mathfrak{D}$.

REMARQUE II. — Si A est un point d'accumulation de $\mathfrak{D}$ et si $A \notin \mathfrak{D}$, alors : $\mathfrak{D} - \{A\} = \mathfrak{D}$.

REMARQUE III. — Si A est un point de $\mathfrak{D}$, on peut avoir $L = f(A)$ ou $L \neq f(A)$; selon le cas, f est continue ou discontinue au point A.

2° **Conséquences de la définition.** — *a*) La notion de limite dépend du choix des topologies (II, 282, 2°) de E et F. Nous supposons que ce choix est fait, une fois pour toutes.

b) ***Unicité de la limite.*** — S'il existe deux points L et L' de F vérifiant (1) on constate, grâce à l'inégalité triangulaire que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\delta(L, L') < 2\varepsilon$, ce qui exige $L' = L$.

c) Si f admet la limite L, relativement à $\mathfrak{D} \subset E$, au point A adhérent à $\mathfrak{D}$, et si $\mathfrak{D}'$ est une partie de $\mathfrak{D}$ admettant A pour point adhérent, alors f admet L pour limite au point A relativement à $\mathfrak{D}'$.

d) Si f admet L et L' pour limites au point A, relativement à $\mathfrak{D}$ et à $\mathfrak{D}'$, f admet, relativement à $\mathfrak{D} \cup \mathfrak{D}'$, L pour limite en A si $L = L'$, mais n'admet pas de limite si $L \neq L'$, (le lecteur pensera aux limites à droite et à gauche dans le cas $E = R$).

3° **Composition des limites.** — Adjoignons l'espace métrique (G, δ').

THÉORÈME. — **Si l'application f de $\mathfrak{D} \subset E$ dans F admet L pour limite au point A, adhérent à $\mathfrak{D}$ et si g est une application de F dans G continue au point L, alors l'application $h = g \circ f$ de $\mathfrak{D}$ dans G admet g (L) pour limite au point A.**

En effet, avec la notation du 1°, $g \circ \varphi$ est une application de $\mathfrak{D} \cup \{ A \}$ dans G qui est continue au point A (au titre d'application composée de deux applications continues).

4° **Limites et suites.** — Le lecteur étendra sans difficulté le théorème du n° 41, 5° du tome II et sa réciproque.

5° **Critère de Cauchy.** — THÉORÈME. **Soit f une application d'une partie $\mathfrak{D}$ d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (F, δ) et soit A un point de E adhérent à $\mathfrak{D}$. Pour que f admette une limite au point A, il faut qu'à tout $\varepsilon > 0$ on sache associer $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que**

$$(2) \quad \begin{pmatrix} M', M'' \in \mathfrak{D} - \{ A \} \\ d(A, M') < \eta(\varepsilon), \quad d(A, M'') < \eta(\varepsilon) \end{pmatrix} \Longrightarrow \delta(f(M'), f(M'')) < \varepsilon.$$

Si, en outre, (F, δ) est complet, cela suffit.

La condition est nécessaire. — Cela résulte de la définition du 1° et de l'inégalité triangulaire.

La condition est suffisante. — Supposons la condition (2) remplie. Soit $\{ M_n \}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{D} - \{ A \}$ qui, au titre de suite sur E, admet la limite A. Montrons que $\{ f(M_n) \}$, qui est une suite sur l'espace complet (F, δ), est une suite de Cauchy, ce qui impliquera qu'il s'agit d'une suite convergente. On peut associer au réel $\eta(\varepsilon)$ qui intervient dans (2) un naturel $N(\varepsilon)$ tel que

$$n > N(\varepsilon) \Longrightarrow d(A, M_n) < \eta(\varepsilon).$$

Il en résulte : $(p > q > N(\varepsilon)) \Longrightarrow \delta(f(M_p), f(M_q)) < \varepsilon$.

La convergence de $\{ f(M_n) \}$ ayant été ainsi prouvée, soit L la limite de cette suite. A ε, nous pouvons associer un naturel m fixe assez grand pour que l'on ait simultanément $d(A, M_m) < \eta(\varepsilon)$ et $\delta(L, f(M_m)) < \varepsilon$. En utilisant (2) et l'inégalité triangulaire, qui s'écrit

$$\delta(L, f(M)) \leqslant \delta(L, f(M_m)) + \delta(f(M_m), f(M)),$$

on en déduit

$$(\forall M \in \mathfrak{D}) \qquad 0 < d(A, M) < \eta(\varepsilon) \Longrightarrow \delta(L, f(M)) < 2\varepsilon.$$

La proposition en résulte.

2. ***Compléments sur les normes.*** — 1° Les notions de norme sur un espace vectoriel, de normes équivalentes, de distance déduite d'une norme ont été étudiées au n° 135 du tome II. Voici deux compléments :

THÉORÈME I. — **Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif valué K et soit $\|\ \|$ une norme sur E. On a :**

$$(1)\quad (\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K)\left(\forall \vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_m \in E\right)\ \left\|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{X}_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \|\vec{X}_i\|.$$

$$(2)\quad \left(\forall \vec{X}, \vec{Y} \in E\right)\qquad \|\vec{X} - \vec{Y}\| \geqslant \left|\|\vec{X}\| - \|\vec{Y}\|\right|.$$

(Dans la relation (1), $|\ |$ est la valeur absolue sur K, dans (2) c'est la valeur absolue sur R).

On démontre (1) par récurrence, en utilisant les axiomes de la norme.

Pour obtenir (2), on constate que $(\vec{X} - \vec{Y}) + \vec{Y} = \vec{X}$ entraîne

$$\|\vec{X} - \vec{Y}\| + \|\vec{Y}\| \geqslant \|\vec{X}\| \qquad \text{ou} \qquad \|\vec{X} - \vec{Y}\| \geqslant \|\vec{X}\| - \|\vec{Y}\|.$$

On obtient une relation analogue en transposant $\vec{X}$ et $\vec{Y}$. En outre

$$\|\vec{X} - \vec{Y}\| = \|\vec{Y} - \vec{X}\|.$$

THÉORÈME II. — **Soit E un espace vectoriel normé sur un corps commutatif K. L'application $\vec{X} \longrightarrow \|\vec{X}\|$ de E dans R (considéré comme un espace vectoriel normé) est uniformément continue.**

Il s'agit d'une conséquence immédiate de la relation (2) du théorème précédent.

2° Dans toute la suite, nous supposerons que le corps de base est celui des réels. Au n° 287, 5° du tome II, nous avons démontré que tout espace vectoriel réel de dimension finie peut être normé et que, sur un tel espace, deux normes quelconques sont équivalentes; les topologies (II, 282, 2°) définies par les distances associées à deux de ces normes sont donc les mêmes; ce résultat aura une importance fondamentale dans l'étude des fonctions vectorielles d'une variable réelle.

3. ***Continuité d'une application linéaire, multilinéaire.*** — Soient E et F deux espaces vectoriels (1) normés, dont les normes sont notées $\|\ \|$ et N. Nous savons (I, 164) que l'ensemble $\mathfrak{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel; dans le cas particulier où E et F ont des dimensions finies p et q, $\mathfrak{L}(E, F)$ a la dimension finie pq (I, 177). Nous supposons implicitement que l'espace vectoriel E n'est pas réduit à son vecteur nul.

(1) Comme nous l'avons déjà dit, nous supposons que le corps de base est R; certains résultats s'étendent au cas d'un espace vectoriel sur C.

1° THÉORÈME FONDAMENTAL. — **S'agissant de $l \in \mathfrak{L}(E, F)$ les propriétés suivantes sont équivalentes.**

a) **l est continue au point $\vec{0}_E$,**

b) **l est uniformément continue,**

c) **l est lipschitzienne, ce qui signifie qu'il existe $k > 0$ tel que**

$$(\forall \vec{X} \in E) \qquad N\left(l(\vec{X})\right) \leqslant k \,\|\, \vec{X} \,\|,$$

d) **Il existe $\alpha = \sup_{\|\vec{Y}\| = 1} N\left(l(\vec{Y})\right)$.**

DÉMONSTRATION DE : (*a*) $\Longrightarrow$ (*d*). — Raisonnons par l'absurde, en supposant que (*a*) est vraie et que (*d*) ne l'est pas. C'est que, à tout n naturel on sait associer $\vec{Y}_n \in E$ tel que

$$\|\, \vec{Y}_n \,\| = 1 \qquad \text{et} \qquad N\left(l(\vec{Y}_n)\right) > n.$$

$\vec{X}_n = \frac{1}{n}\vec{Y}_n$ vérifie : $\|\, \vec{X}_n \,\| = \frac{1}{n}$ et $N\left(l(\vec{X}_n)\right) > 1.$

La suite $\{\vec{X}_n\}$ converge vers $\vec{0}_E$, alors que la suite $l\left(\vec{X}_n\right)$ ne converge pas vers $l\left(\vec{0}_E\right)$, ce qui constitue une contradiction (I, 4°).

DÉMONSTRATION DE : (*d*) $\Longrightarrow$ (*c*). Si (*d*) est vraie, on a :

$$(\forall \vec{X} \in E - \{\vec{0}_E\}) \quad N\left(l\left(\frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}\right)\right) \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad N\left(l(\vec{X})\right) \leqslant \alpha \,\|\, \vec{X} \,\|.$$

Cette dernière relation reste valable pour $\vec{X} = \vec{0}_E$; (*c*) est vraie, avec $k = \alpha$.

DÉMONSTRATION DE : (*c*) $\Longrightarrow$ (*b*). Si (*c*) est vraie on a :

$$(\forall \vec{X}', \vec{X}'' \in E) \quad N\left[l(\vec{X}') - l(\vec{X}'')\right] = N\left(l(\vec{X}' - \vec{X}'')\right) \leqslant k \,\|\, \vec{X}' - \vec{X}'' \,\|.$$

On en déduit que (*b*) est vraie.

Comme il est bien évident que : (*b*) $\Longrightarrow$ (*a*), le théorème est démontré.

REMARQUE. — Si l'ensemble $\mathfrak{B} = \left\{ N\left(l(\vec{Y})\right),\ \|\, \vec{Y} \,\| = 1 \right\}$ admet une borne supérieure α (cas *d*), alors l'ensemble $\mathfrak{B}' = \left\{ N\left(l(\vec{Z})\right),\ \|\, \vec{Z} \,\| \leqslant 1 \right\}$ admet aussi α pour borne supérieure.

Montrons pour cela que $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ ont mêmes majorants.

I. Soit M un majorant de $\mathfrak{B}$ et supposons qu'il existe dans $\mathfrak{B}'$ un nombre $r' = N\left(l(\vec{Z}_0)\right)$ tel que $r' > M$, ce qui implique $\vec{Z}_0 \neq \vec{0}_E$;

$$\vec{Y}_0 = \frac{\vec{Z}_0}{\|\, \vec{Z}_0 \,\|} \text{ a pour norme 1} \qquad \text{et} \qquad N\left(l(\vec{Y}_0)\right) = \frac{r'}{\|\, \vec{Z}_0 \,\|} \geqslant r' > M,$$

ce qui est absurde. M est donc un majorant de $\mathfrak{B}'$.

II. Puisque $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$, tout majorant de $\mathfrak{N}'$ est majorant de $\mathfrak{N}$.

2° THÉORÈME II. — **L'ensemble $\mathfrak{L}_{\mathcal{C}}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un espace vectoriel réel, sur lequel $|||\, l\, ||| = \sup_{\|\vec{Y}\|=1} N\left(l\left(\vec{Y}\right)\right)$ est une norme.**

La démonstration, très facile, est laissée aux soins du lecteur. Il utilisera :

$$N\left((l+m)\left(\vec{Y}\right)\right) \leqslant N\left(l\left(\vec{Y}\right)\right) + N\left(m\left(\vec{Y}\right)\right); \qquad N\left(\lambda l\left(\vec{Y}\right)\right) = |\lambda|\, N\left(l\left(\vec{Y}\right)\right).$$

REMARQUE. — On constate que $|||\, l\, |||$ a été définie comme étant le plus petit réel $\alpha > 0$ tel que

$$\left(\forall \vec{X} \in E\right) \qquad N\left(l\left(\vec{X}\right)\right) \leqslant \alpha \,\|\vec{X}\|.$$

THÉORÈME III. — **Soient $u \in \mathfrak{L}_{\mathcal{C}}(E, F)$, $v \in \mathfrak{L}_{\mathcal{C}}(F, G)$ et $l = v \circ u$. Alors :**

$$l \in \mathfrak{L}_{\mathcal{C}}(E, G) \qquad \text{et} \qquad |||\, l\, |||_2 \leqslant |||\, v\, |||_1 . |||\, u\, |||.$$

G est ici un espace vectoriel normé dont la norme est désignée par n.

Pour éviter des confusions possibles, nous avons affecté des indices 1 et 2 les normes dans les espaces vectoriels $\mathfrak{L}_{\mathcal{C}}(F,G)$ et $\mathfrak{L}_{\mathcal{C}}(E, G)$.

La linéarité de l est démontrée au n° 165 du tome I; sa continuité résulte de la composition des applications continues. Enfin, pour tout $\vec{Y} \in E$, tel que $\|\vec{Y}\| = 1$, on a, en utilisant la remarque qui précède,

$$n\left(l\left(\vec{Y}\right)\right) \leqslant |||\, v\, |||_1 N\left(u\left(\vec{Y}\right)\right) \leqslant |||\, v\, |||_1 . |||\, u\, |||.$$

La proposition en résulte.

THÉORÈME IV. — **Si E a une dimension finie p, alors (que F ait une dimension finie ou non) toute application linéaire l de E dans F est continue; la norme introduite au théorème II s'écrit $|||\, l\, ||| = k(l)$ avec**

$$k(l) = \sup_{i \in [1, p]} N\left(l\left(\vec{e_i}\right)\right), \qquad \mathcal{E} = \left\{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_p}\right\} \text{ base quelconque de E.}$$

Toutes les normes sur E étant ici équivalentes, adoptons

$$\|\vec{X}\| = \left\|\sum_i \xi_i \vec{e_i}\right\| = \sum_i |\xi_i|.$$

Soit $l \in \mathfrak{L}(E, F)$. Nous avons, pour tout $\vec{X} \in E$,

$$N\left(l\left(\vec{X}\right)\right) \leqslant \sum_i \left[|\xi_i|\, N\left(l\left(\vec{e_i}\right)\right)\right].$$

En désignant par $k(l)$ la borne supérieure des $N\left(l\left(\vec{e_i}\right)\right)$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$, nous écrivons

$$N\left(l\left(\vec{X}\right)\right) \leqslant k(l) \sum_i |\xi_i| = k(l).\|\vec{X}\|$$

Il en résulte que l est lipschitzienne, donc continue.

D'autre part, la norme introduite au théorème II vérifie, d'après l'inégalité précédente,

$$|||\, l \,||| = \sup_{\|\vec{Y}\|=1} N\left(l(\vec{Y})\right) \leqslant k(l).$$

Mais, chaque $\vec{e_i}$ vérifiant $\|\vec{e_i}\| = 1$, on a $|||\, l \,||| \geqslant \sup N\left(l(\vec{e_i})\right)$.

En conclusion : $|||\, l \,||| = k(l)$.

APPLICATION. — Soient E′ et E″ deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E, de dimension finie. La projection sur E′ (resp. E″) parallèlement à E″ (resp. E′) est une application uniformément continue de E sur E′ (resp. E″).

D'après le n° 162 du tome I, il s'agit d'une application linéaire. Puisque l'espace-objet a une dimension finie, c'est une une application continue et, d'après le théorème fondamental, c'est une application uniformément continue.

3°. **Continuité d'une application m- linéaire.** — *a*) Nous allons généraliser le fait qu'une application linéaire est continue si et seulement si elle est lipschitzienne.

THÉORÈME. — **Soient $E_1, \ldots, E_m$, F des espaces vectoriels munis de normes $\| \ \|_1, \ldots, \| \ \|_m$, N et soit φ une application m- linéaire de $E = E_1 \times \ldots \times E_m$ dans F. Alors φ est continue si et seulement s'il existe $k > 0$ tel que**

$$(1) \qquad (\forall \vec{X} = (\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_m) \in E) \qquad N\left(\varphi(\vec{X})\right) \leqslant k \,\|\vec{X}_1\|_1 \ldots \|\vec{X}_m\|_m.$$

Pour alléger l'écriture, limitons nous à démontrer le théorème dans le cas $m = 2$. Munissons E de la norme $\|\vec{X}\| = \sup\left(\|\vec{X}_1\|_1, \|\vec{X}_2\|_2\right)$.

I. La condition est suffisante. — Nous supposons que la condition est remplie.

De l'égalité

$$\varphi(\vec{X}_1, \vec{X}_2) - \varphi(\vec{A}_1, \vec{A}_2) = \varphi(\vec{X}_1 - \vec{A}_1, \vec{X}_2) + \varphi(\vec{A}_1, \vec{X}_2 - \vec{A}_2),$$

que le lecteur vérifiera en retranchant et ajoutant $\varphi(A_1, X_2)$ et utilisant la bilinéarité de φ, nous déduisons, compte tenu de (1);

$$N\left(\varphi(\vec{X}_1, \vec{X}_2) - \varphi(\vec{A}_1, \vec{A}_2)\right) \leqslant k\left(\|\vec{X}_1 - A_1\|_1 \|\vec{X}_2\|_2 + \|\vec{A}_1\|_1 \|\vec{X}_2 - \vec{A}_2\|_2\right).$$

Il en résulte que, pour tout $\eta > 0$, l'inégalité

$$(2) \qquad \|(\vec{X}_1, \vec{X}_2) - (\vec{A}_1, \vec{A}_2)\| < \eta,$$

qui traduit : $\|\vec{X}_1 - \vec{A}_1\|_1 < \eta$ et $\|\vec{X}_2 - \vec{A}_2\|_2 < \eta$,

implique (compte tenu de $\|\vec{X}_2\|_2 \leqslant \|\vec{A}_2\|_2 + \|\vec{X}_2 - \vec{A}_2\|_2$) :

$$N\left(\varphi(\vec{X}_1, \vec{X}_2) - \varphi(\vec{A}_1, \vec{A}_2)\right) < k\,\eta\,(\|\vec{A}_2\|_2 + \eta + \|\vec{A}_1\|_1).$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, il suffit d'adopter $\eta = \inf\left(1, \dfrac{\varepsilon}{k\left(\|\vec{A}_1\|_1 + \|\vec{A}_2\|_2 + 1\right)}\right)$,

pour constater que (2) implique

$$N\left(\varphi(\vec{X}_1, \vec{X}_2) - \varphi(\vec{A}_1, \vec{A}_2)\right) < \varepsilon.$$

II. La condition est nécessaire. — Nous supposons que φ est continue au point $(\vec{0}_{E_1}, \vec{0}_{E_2})$.

Il existe donc une boule fermée B, centrée en ce point, dont le rayon est désigné par r, telle que

$$(\forall\, (\vec{Y}_1, \vec{Y}_2) \in B) \qquad N\left(\varphi\,(\vec{Y}_1, \vec{Y}_2)\right) \leqslant 1.$$

Soit $(\vec{X}_1, \vec{X}_2) \in E$, tel que $\vec{X}_1 \neq \vec{0}_{E_1}$ et $\vec{X}_2 \neq \vec{0}_{E_2}$.

Posons : $\vec{Z}_1 = \dfrac{r}{\| \vec{X}_1 \|_1}\, \vec{X}_1$ et $\vec{Z}_2 = \dfrac{r}{\| \vec{X}_2 \|_2}\, \vec{X}_2$.

On a : $\| (\vec{Z}_1, \vec{Z}_2) \| = r$; d'où $N\left(\varphi\,(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)\right) \leqslant 1$.

En remplaçant $\vec{X}_1$ et $\vec{X}_2$ par leurs valeurs en fonction de $\vec{Z}_1$ et $\vec{Z}_2$, on en déduit :

$$N\left(\varphi\,(\vec{X}_1, \vec{X}_2)\right) \leqslant \frac{1}{r^2} \| \vec{X}_1 \|_1 \| \vec{X}_2 \|_2,$$

relation qui subsiste pour $(\vec{X}_1, \vec{X}_2) \in E$ tel que $\vec{X}_1 = \vec{0}_{E_1}$ ou $\vec{X}_2 = \vec{0}_{E_2}$ et qui n'est autre que (1), avec $k = \dfrac{1}{r^2}$.

b) THÉORÈME. — **Soient E_j des espaces vectoriels de dimensions finies p_j, ($j = 1, \ldots, m$) et soit F un espace vectoriel normé, non nécessairement de dimension finie. Alors toute application m-linéaire φ de $E = E_1 \times \ldots \times E_m$ dans F est continue.**

En utilisant des bases arbitrairement choisies des E_j, nous avons

$$\vec{X}_j = \sum_{k_j=1}^{p_j} \xi_{j,k_j}\, \vec{e}_{j,k_j}.$$

D'où : $\varphi(\vec{X}) = \sum \xi_{1,k_1}, \ldots, \xi_{m,k_m}\, \varphi(\vec{e}_{1,k_1}, \ldots, \vec{e}_{m,k_m})$.

Les E_j ayant des dimensions finies, nous pouvons adopter $\| \vec{X}_j \|_j = \sup | \xi_{j,k_j} |$.

En posant $k = \sum N\left(\varphi\,(\vec{e}_{1,k_1}, \ldots, \vec{e}_{m,k_m})\right)$, nous obtenons l'inégalité (1) du *a*).

4. *Continuité et limite d'une fonction à valeurs vectorielles.* — L'espace-image F est ici un espace vectoriel normé, sur le corps R; il est muni de la distance δ déduite de la norme qui sera dorénavant notée $\| \quad \|$.

1° **Opérations sur les applications continues et sur les limites.** — Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications dans F d'une partie $\mathfrak{D}$ d'un espace métrique (E, d). En reprenant le raisonnement du n° **40** du tome II, on vérifie que $\mathcal{F}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel réel et que $\mathcal{F}$ admet pour sous-espaces vectoriels les sous-ensembles respectivement constitués par les éléments de $\mathcal{F}$

- continus en un point donné de $\mathfrak{D}$;
- continus sur $\mathfrak{D}$;
- munis d'une limite au point A donné, adhérent à $\mathfrak{D}$ (l'application qui à chaque fonction associe sa limite au point A étant alors linéaire).

2° **Cas où F a une dimensions finie q.** — La notion de limite continue à dépendre de la topologie de E, mais elle ne dépend plus de la norme sur F. Ayant choisi arbitrairement une base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_q)$ de F, nous adoptons pour norme de F : $\| \sum_{i=1}^{q} \xi_i\, \vec{e}_i \| = \sup_i | \xi_i |$.

Nous traduisons f par : $M \in \mathfrak{D} \longrightarrow f(M) = \sum_i g_i(M)\,\vec{e}_i$;

en d'autres termes la donnée de f équivaut à celle des q applications g_i de $\mathfrak{D}$ dans R.

Si $\vec{L} = l_1\vec{e}_1 + \ldots + l_q\vec{e}_q$ est un point de F : $\delta\left(f(M), \vec{L}\right) = \sup |\, g_i(M) - l_i \,|$.

On en déduit que : **f admet $\vec{L}$ pour limite au point A, adhérent à $\mathfrak{D}$, si et seulement si les applications g_i admettent les l_i pour limites au point A.**

En particulier : **f est continue au point A de $\mathfrak{D}$ si et seulement si chacune des g_i est continue au point A.**

3° **Projectivité de la limite.** — Nous supposons ici que l'espace vectoriel F, de dimension finie, est la somme directe de deux sous-espaces supplémentaires F′ et F″. Nous savons (3, 2°) que la projection ϖ' sur F′, parallèlement à F″, est une appllcation continue de F sur F′. En utilisant le n° I, 3°, on en déduit que : **si f admet $\vec{L}$ pour limite au point A, alors $\varpi' \circ f$ admet $\varpi'\left(\vec{L}\right)$ pour limite au point A**, et que : **si f est continue au point A alors $\varpi' \circ f$ est continue au point A.**

II. DÉRIVATION ET INTÉGRATION D'UNE FONCTION VECTORIELLE D'UNE VARIABLE RÉELLE

Dans le présent sous-chapitre, nous nous donnons un intervalle $\mathfrak{I}$ (fermé, ouvert ou semi-ouvert, borné ou non) et un espace vectoriel réel, normé, que nous désignerons en général par E.

Nous allons étudier, sous le nom de fonction vectorielle d'une variable réelle une application $\vec{F}$ de $\mathfrak{I}$ dans E, qui sera notée en général :

$$u \longrightarrow \vec{F}(u).$$

Nous serons amenés à utiliser dans un cas particulier des résultats généraux acquis au tome II et, en particulier la notion d'application différentiable.

5. *Dérivée.* — 1° DÉFINITION. — **Soit $\vec{F}$ une application de l'intervalle $\mathfrak{I}$ de R dans l'espace vectoriel E. On dit que $\vec{F}$ est dérivable au point u_0 de $\mathfrak{I}$ quand le vecteur**

$$\vec{W}(u) = \frac{\vec{F}(u) - \vec{F}(u_0)}{u - u_0},$$

admet une limite $\vec{L}$ quand u tend vers u_0 sur $\mathfrak{I} - \{u_0\}$. Le vecteur $\vec{L}$ de E est alors appelé dérivée de $\vec{F}$ au point u_0; on le note $\vec{L} = \vec{F}'(u_0)$.

2° **Propriétés des dérivées.** — La définition précédente a été calquée sur celle que nous avons adoptée au n° 68 du tome II dans le cas d'une fonction numérique d'une variable réelle. Cela permet d'obtenir les résultats suivants :

- **si une fonction vectorielle est dérivable en un point, elle est continue en ce point;**
- **une fonction vectorielle est différentiable en un point si, et seulement si elle est dérivable en ce point.**

On peut étendre les notions de dérivées à droite et à gauche, de fonction dérivée, de dérivées successives (qui seront notés $\vec{F}^{(n)}$), d'application de classe C^k.

La *linéarité de la dérivation* s'établit comme au n° 70, 4° du tome II.

3° **Cas où l'espace vectoriel E a une dimension finie.** — *a*) Soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_q)$ une base arbitrairement choisie de E. On a :

$$\vec{F}(u) = \sum_{i=1}^{q} f_i(u)\, \vec{e}_i.$$

Les coordonnées du vecteur $\vec{W}(u)$ envisagé dans la définition s'écrivent $\dfrac{f_i(u) - f_i(u_0)}{u - u_0}$; il résulte du n° 4, 2° que $\vec{F}$ admet une dérivée $\vec{F}'(u_0)$ si et seulement si chacune des applications f_i de $\mathfrak{I}$ dans R admet une dérivée $f_i'(u_0)$ et que, le cas échéant, $\vec{F}'(u_0)$ est le vecteur dont les coordonnées sont les $f_i'(u_0)$.

APPLICATION A LA DÉRIVATION D'UNE MATRICE. — E est ici l'espace vectoriel de dimension mn, constitué par les matrices réelles à m lignes et n colonnes. Une base de E est (I_{lk}), avec $(l, k) \in [1, m] \times [1, n]$, la matrice I_{lk} ayant tous ses éléments nuls sauf celui qui correspond à la ligne l et à la colonne k, lequel est égal à 1. Une application M d'un intervalle réel $\mathfrak{I}$ dans E peut s'écrire, dans cette base,

$$u \longrightarrow M(u) = \sum_{l,k} \xi_{l,k}(u)\, I_{lk}.$$

Dans la mesure où les mn applications $\xi_{l,k}$ de $\mathfrak{I}$ dans R sont dérivables au point u_0 de $\mathfrak{I}$, il en est de même pour M et on a :

$$M'(u_0) = \sum_{l,k} \xi'_{l,k}(u_0)\, I_{lk} \qquad \text{ou} \qquad ([\xi_{l,k}(u)])' = [\xi'_{l,k}(u)].$$

b) **Dérivation d'une application de $\mathfrak{I}$ dans E et projection de cette application sur un sous-espace E' de E sont deux opérations permutables,** ainsi que cela résulte du n° 4, 3°.

4° **Dérivée d'une application bilinéaire.** — *a*) THÉORÈME. — **Soient E_1, E_2, $\mathcal{E}$ des espaces vectoriels normés, sur R et soit φ une application de $E_1 \times E_2$ dans $\mathcal{E}$, bilinéaire et continue** (cette dernière condition étant automatiquement

remplie si E_1 et E_2 ont des dimensions finies). **Soient d'autre part g_1 et g_2 des applications d'un même intervalle réel $\mathfrak{I}$ dans E_1 et E_2, dérivables au point u_0 de $\mathfrak{I}$. Alors l'application $\vec{F}$ de $\mathfrak{I}$ dans $\mathcal{E}$ telle que $\vec{F}(u) = \varphi(g_1(u), g_2(u))$ admet au point u_0 de $\mathfrak{I}$ la dérivée**

$$\vec{F}'(u_0) = \varphi(g_1'(u_0), g_2(u_0)) + \varphi(g_1(u_0), g_2'(u_0)).$$

Pour $u \in \mathfrak{I} - \{u_0\}$, nous pouvons écrire en utilisant la bilinéarité de φ :

$$(1)\quad \frac{\vec{F}(u) - \vec{F}(u_0)}{u - u_0} = \varphi\left(\frac{g_1(u) - g_1(u_0)}{u - u_0},\ g_2(u)\right) + \varphi\left(g_1(u_0),\ \frac{g_2(u) - g_2(u_0)}{u - u_0}\right).$$

De : $\lim\limits_{u \to u_0} \dfrac{g_1(u) - g_1(u_0)}{u - u_0} = g_1'(u_0)$ et $\lim\limits_{u \to u_0} g_2(u) = g_2(u_0)$,

on déduit :

$$\lim_{u \to u_0} \left(\frac{g_1(u) - g_1(u_0)}{u - u_0},\ g_2(u)\right) = (g_1'(u_0),\ g_2(u_0)).$$

De la continuité de φ, on déduit (I, 3°) que le premier vecteur du second membre de (1) admet la limite $\varphi(g_1'(u_0), g_2(u_0))$; de la même façon, le second vecteur admet la limite $\varphi(g_1(u_0), g_2'(u_0))$.

REMARQUES I. — On démontre par récurrence sur n que si g_1 et g_2 admettent chacune une dérivée d'ordre n sur $\mathfrak{I}$, $\vec{F}$ admet une dérivée d'ordre n, fournie par la formule de Leibniz :

$$\vec{F}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \varphi(g_1^{(n-k)}, g_2^{(k)})$$

II. — Le théorème s'étend au cas d'une application m-linéaire.

Comme cas particuliers du théorème précédent, nous obtenons :

THÉORÈME I. — **Si g et $\vec{G}$ sont des applications dérivables de $\mathfrak{I}$ dans R et dans l'espace vectoriel normé E, alors l'application**

$$u \longrightarrow \vec{F}(u) = g(u)\,\vec{G}(u)$$

de $\mathfrak{I}$ dans E est dérivable et : $\vec{F}' = g'\vec{G} + g\vec{G}'$.

THÉORÈME II. — **Si $\vec{G}$ et $\vec{H}$ sont des applications dérivables de $\mathfrak{I}$ dans l'espace vectoriel euclidien E, alors les applications**

$$u \longrightarrow f(u) = \vec{G}(u).\vec{H}(u) \qquad \text{de } \mathfrak{I} \text{ dans R}$$

$$u \longrightarrow \vec{F}(u) = \vec{G}(u) \wedge \vec{H}(u) \qquad \text{de } \mathfrak{I} \text{ dans E}$$

sont dérivables et $f' = \vec{G}'.\vec{H} + \vec{G}.\vec{H}'$, $\vec{F}' = \vec{G}' \wedge \vec{H} + \vec{G} \wedge \vec{H}'$

En particulier, pour $\vec{H} = \vec{G}$: $\left(\|\vec{G}\|^2\right)' = 2\vec{G}.\vec{G}'$.

Nous montrerons (6, 2°) qu'une application vectorielle dérivable sur un intervalle est constante si et seulement si l'application dérivée est nulle; il en résultera que, dans un espace euclidien, **l'orthogonalité du vecteur et de sa dérivée caractérise un vecteur de norme constante.**

Nous allons maintenant donner des applications importantes des théorèmes I et II.

b) **Dérivation d'un vecteur sous forme polaire, dans le plan.** — Soit E un espace vectoriel euclidien orienté, de dimension 2, rapporté à une base orthonormée positive $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Le vecteur unitaire : $\vec{u}(\theta) = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$

apparaît comme une fonction dérivable de la mesure $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$ de son angle polaire. On a

$$\vec{u}'(\theta) = \vec{i}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \vec{j}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

$\vec{u}'(\theta)$ est donc le vecteur unitaire dont l'angle polaire a pour mesure $\theta + \frac{\pi}{2}$; ce vecteur, qui se déduit de $\vec{u}(\theta)$ par la rotation de mesure $\frac{\pi}{2}$, sera dit directement perpendiculaire à $\vec{u}(\theta)$; nous le noterons $\vec{p}(\theta)$; nous constatons

$$\vec{p}'(\theta) = -\vec{u}(\theta).$$

Considérons maintenant une application $\vec{F}$ d'un intervalle réel J dans E, que nous écrirons ici, en utilisant les coordonnées polaires (III, 134,) relatives à la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$:

$$\vec{F} = r\vec{u}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad t \longrightarrow \vec{F}(t) = r(t)\,\vec{u}(\theta(t)).$$

Dans la mesure où les applications r et θ de J dans R sont dérivables, $\vec{F}$ est dérivable et

$$\vec{F}'(t) = r'(t)\,\vec{u}(\theta(t)) + r(t)\,\theta'(t)\,\vec{p}(\theta(t)),$$

ce que nous retiendrons sous la forme différentielle

$$\boxed{d(r\vec{u}) = \vec{u}\,dr + \vec{p}\,r\,d\theta}.$$

Dans le plan affine $\mathcal{E}$ associé, d'origine O, si $\overrightarrow{OM} = \vec{F}$ (fig. 1), r et θ sont les coordonnées polaires de M, O étant le pôle, Ox l'axe polaire, nous écrirons

$$d\overrightarrow{M} = \vec{u}\,dr + \vec{p}\,r\,d\theta.$$

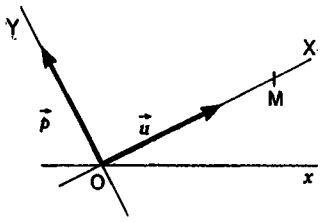


FIG. 1.

c) ***Dérivation d'un vecteur sous forme semi-polaire dans l'espace.*** — Soit E un espace vectoriel euclidien orienté, de dimension 3, rapporté à une base orthonormée positive $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ et soit $\mathcal{E}$ l'espace affine associé, d'origine O.

Si $\vec{F}$ est une application d'un intervalle réel $\mathfrak{I}$ dans E, nous pourrons l'écrire sous la forme (fig. 2)

$$\vec{F} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r\vec{u} + z\vec{k},$$

r et θ étant les coordonnées polaires de la projection orthogonale m de M sur le plan xOy.

Dans la mesure où les applications r, θ, z de $\mathfrak{I}$ dans R sont dérivables, $\vec{F}$ est dérivable,

$$\vec{F}'(t) = r'(t)\,\vec{u}\big(\theta(t)\big) + r(t)\,\theta'(t)\,\vec{p}\big(\theta(t)\big) + z'(t)\,\vec{k}.$$

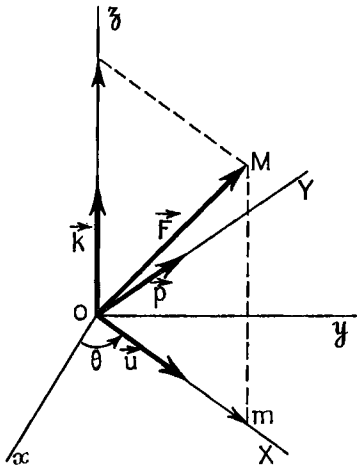


Fig. 2.

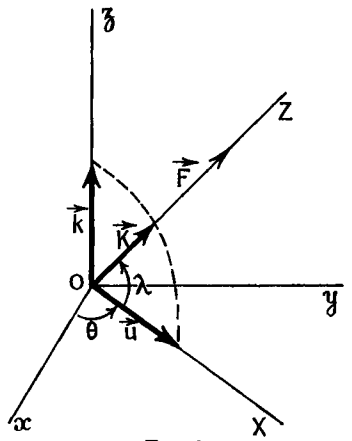


Fig. 3.

Nous retiendrons ce résultat sous la forme différentielle

$$\boxed{d\vec{M} = \vec{u}\,dr + \vec{p}\,r\,d\theta + \vec{k}\,dz}$$

d) **Dérivation d'un vecteur sous forme polaire, dans l'espace.** — Nous reprenons les hypothèses du *c*).

Le vecteur unitaire le plus général s'écrit (en utilisant sa longitude θ et sa latitude λ, ainsi que nous l'expliquons au n° 134, 3°, du tome III) :

$$\vec{K} = \vec{u}\cos\lambda + \vec{k}\sin\lambda, \qquad \text{avec} \qquad \vec{u} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta.$$

Considérons maintenant une application $\vec{F}$ d'un intervalle réel $\mathfrak{I}$ dans E que nous écrirons, en coordonnées polaires, $\vec{F} = \rho\vec{K}$, c'est-à-dire (fig. 3).

$$t \longrightarrow \vec{F}(t) = \rho(t)\left[\vec{u}(\theta(t))\cos\lambda(t) + \vec{k}\sin\lambda(t)\right].$$

Dans la mesure où les applications ρ, θ et λ de $\mathfrak{I}$ dans R sont dérivables $\vec{F}$ est dérivable et

$$\vec{F}' = \rho'\left(\vec{u}\cos\lambda + \vec{k}\sin\lambda\right) + \rho\left(\vec{p}\,\theta'\cos\lambda - \vec{u}\,\lambda'\sin\lambda + \vec{k}\,\lambda'\cos\lambda\right),$$

ce que nous retiendrons sous la forme différentielle

$$\boxed{d\vec{F} = \vec{u}(\cos\lambda\, d\rho - \rho\sin\lambda\, d\lambda) + \vec{p}\,\rho\cos\lambda\, d\theta + \vec{k}(\sin\lambda\, d\rho + \rho\cos\lambda\, d\lambda).}$$

e) **Dérivation d'une base orthonormée.** — Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et soient $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ trois applications dérivables d'un même intervalle réel $\mathfrak{I}$ dans E, liées de telle sorte que, pour tout $t \in \mathfrak{I}$

$$\left\{\vec{I}(t),\quad \vec{J}(t),\quad \vec{K}(t)\right\}$$

soit une base orthonormée de E, ce que nous exprimerons en disant que $\left\{\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right\}$ est une *base orthonormée mobile* de E, fonction de la variable réelle t.

Chacun des vecteurs unitaires $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ a pour dérivée un vecteur orthogonal; il existe donc six applications p, q, r, p_1, q_1, r_1 de $\mathfrak{I}$ dans R telles que l'on ait les égalités (entre applications).

$$(2)\qquad \vec{I}' = r\vec{J} + q_1\vec{K},\quad \vec{J}' = p\vec{K} + r_1\vec{I},\quad \vec{K}' = q\vec{I} + p_1\vec{J}.$$

En écrivant que la dérivée $\vec{J}'.\vec{K} + \vec{J}.\vec{K}'$ de l'application nulle $\vec{J}.\vec{K}$ est, elle aussi, l'application nulle, on obtient

$$\left(p\vec{K} + r_1\vec{I}\right).\vec{K} + \vec{J}.\left(q\vec{I} + p_1\vec{J}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad p_1 = -p.$$

De même : $q_1 = -q$ et $r_1 = -r$. En conclusion il existe trois applications p, q, r de $\mathfrak{I}$ dans R telles que (2) prenne la forme

$$(3)\qquad \begin{bmatrix}\vec{I}'\\ \vec{J}'\\ \vec{K}'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & r & -q\\ -r & 0 & p\\ q & -p & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{I}\\ \vec{J}\\ \vec{K}\end{bmatrix}$$

Retrouvons ce résultat en utilisant une base orthonormée $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$, arbitrairement choisie de E. Nous pouvons écrire

$$\begin{bmatrix}\vec{I}\\ \vec{J}\\ \vec{K}\end{bmatrix} = S\begin{bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{bmatrix};\qquad \text{d'où}\qquad \begin{bmatrix}\vec{I}'\\ \vec{J}'\\ \vec{K}'\end{bmatrix} = S'\begin{bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{bmatrix}$$

S est orthogonale $\left(\tilde{S}\,S = U,\ \text{matrice unité}\right)$. On a donc :

$$S' = S'\,\tilde{S}\,S \qquad \text{ou} \qquad S' = TS \qquad \text{avec} \qquad T = S'\,\tilde{S}.$$

La dérivation de $S\,\tilde{S} = U$ fournit $S'\,\tilde{S} = -S\left(\tilde{S}\right)'$ ou $T = -S\left(\tilde{S}\right)'$.

On en déduit $T = -\tilde{T}$. En conclusion, il existe une matrice antisymétrique T telle que $S' = TS$; c'est cette matrice qui intervient dans (3).

REMARQUE. — Supposons maintenant que E est orienté. Nous pouvons

interpréter (3) dans le cas où la base orthonormée mobile $\{\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}$ est positive, en introduisant $\vec{\Omega}$ tel que :

$$(\forall\, t \in \mathfrak{I}) \qquad \vec{\Omega}(t) = \vec{I}\,p(t) + \vec{J}\,q(t) + \vec{K}\,r(t).$$

Nous constatons que (3) n'est autre que

$$(4) \qquad \vec{I}' = \vec{\Omega} \wedge \vec{I}, \qquad \vec{J}' = \vec{\Omega} \wedge \vec{J}, \qquad \vec{K}' = \vec{\Omega} \wedge \vec{K}.$$

6. *Formule des accroissements finis et formules de Taylor pour une fonction vectorielle.* — 1° LEMME. — **Soient g et $\vec{F}$ deux applications continues du segment réel $[a, b]$, $a < b$, l'une dans R, l'autre dans l'espace vectoriel réel normé E, toutes deux dérivables à droite en tout point de $]a, b[$, avec**

$$(1) \qquad (\forall\, u \in]a, b[) \qquad \| \vec{F}'_d(u) \| \leqslant g'_d(u).$$

Alors on a :

$$\| \vec{F}(b) - \vec{F}(a) \| \leqslant g(b) - g(a). \qquad (2)$$

On va montrer qu'étant donné $\varepsilon > 0$, on a, pour tout $u \in [a, b]$

$$(3) \qquad \| \vec{F}(u) - \vec{F}(a) \| \leqslant g(u) - g(a) + \varepsilon(u - a) + \varepsilon.$$

On appliquera ensuite (3) à $u = b$; enfin on fera tendre ε vers 0 et, à la limite, on obtiendra (2).

Soit I_ε l'ensemble formé par les $t \in [a, b]$ tels que (3) est vrai pour tout $u \in [a, t]$. On constate que $a \in I$.

En posant

$$\varphi(u) = -\left\| \vec{F}(u) - \vec{F}(a) \right\| + g(u) - g(a) + \varepsilon(u - a) + \varepsilon$$

on définit une application *continue* φ de $[a, b]$ dans R qui prend une valeur positive au point a, et par suite en tout point d'un segment de la forme $[a, b']$, $a < b' \leqslant b$; I_ε n'est donc pas réduit à $\{a\}$.

D'autre part si on a $t \in I_\varepsilon$ et $a \leqslant t' \leqslant t$, alors on a $t' \in I_\varepsilon$, si bien que I_ε est un intervalle d'origine a; soit c l'extrémité de cet intervalle, qui en est la borne supérieure. La relation (3) est ainsi vérifiée pour tout $u \in [a, c[$; il en résulte, par continuité, qu'elle est vérifiée pour $u = c$; on a ainsi $c \in I_\varepsilon$ et $I_\varepsilon = [a, c]$.

Nous allons montrer par l'absurde : $c = b$. Faisons l'hypothèse (H) :

$$a < c < b.$$

De cette hypothèse résultent l'existence de $\vec{F}'_d(c)$ et $g'_d(c)$ et, d'après la définition même de ces dérivées, la possibilité d'associer au réel ε considéré ci-dessus un réel $\alpha > 0$ tel que

$$(\forall\, u \in]c, c + \alpha[) \qquad \begin{cases} \| \vec{F}'_d(c) \| \geqslant \dfrac{\| \vec{F}(u) - \vec{F}(c) \|}{u - c} - \dfrac{\varepsilon}{2} \\ g'_d(c) \leqslant \dfrac{g(u) - g(c)}{u - c} + \dfrac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

En utilisant $\| \vec{F}'_d(c) \| \leqslant g'_d(c)$, on en déduit, compte tenu de $u - c > 0$,

$(\forall\, u \in]c,\ c + \alpha[) \quad \| \vec{F}(u) - \vec{F}(c) \| \leqslant g(u) - g(c) + \varepsilon(u - c).$

Or, d'après $c \in I_\varepsilon$, $\| \vec{F}(c) - \vec{F}(a) \| \leqslant g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon.$

La somme des deux premiers membres des inégalités précédentes majorant $\| \vec{F}(u) - \vec{F}(a) \|$, on en déduit que tout $u \in]c,\ c + \alpha[$ vérifie (3) et que $I_\varepsilon \supset [a,\ c + \alpha[$, en contradiction avec $I_\varepsilon = [a,\ c]$. C'est que l'hypothèse (H) est absurde. On a donc $I_\varepsilon = [a,\ b]$ et le théorème est démontré.

REMARQUE. — L'inégalité (2) est vérifiée si g et $\vec{F}$ sont dérivables à gauche (resp. dérivables) sur $]a,\ b[$, à condition de remplacer l'inégalité qui figure dans (1) par

$$\| \vec{F}'_g(u) \| \leqslant g'_g(u) \qquad [\text{resp. } \| \vec{F}'(u) \| \leqslant g'(u)].$$

COROLLAIRE. — **Soit g une application continue de $[a,\ b]$ dans R admettant en tout point de $]a,\ b[$ une dérivée à droite (resp. gauche) positive au sens large, alors g est croissante, au sens large.**

Il suffit de désigner par $\vec{F}$ l'application nulle de $[a,\ b]$ dans R et d'écrire (2), en y remplaçant a et b par deux points u' et u'' de $[a,\ b]$ tels que $u' < u''$.

2° **Formule des accroissements finis.** — THÉORÈME. — **Soit $\vec{F}$ une application continue d'un segment réel $[a,\ b]$, $a < b$, dans un espace vectoriel réel normé E. On suppose qu'en tout $u \in]a,\ b[$, $\vec{F}$ admet une dérivée dont la norme n'excède pas un réel positif donné K.**

Alors :

$$(4) \qquad \| \vec{F}(b) - \vec{F}(a) \| \leqslant K(b - a).$$

On utilise le lemme, avec $g(u) = Ku$.

REMARQUE. — En particulier, **si $\vec{F}$ admet une dérivée nulle en tout point de $]a,\ b[$, alors $\vec{F}$ est constante sur $[a,\ b]$**, ainsi qu'on le constate en faisant $K = 0$ et en remplaçant dans (4) b par le point générique de $[a,\ b]$.

3° THÉORÈME DE TAYLOR-LAGRANGE. — **Soit $\vec{F}$ une application de classe C^n d'un intervalle réel $[a,\ b]$, $a < b$, dans un espace vectoriel réel normé E. On suppose qu'en tout point $u \in]a,\ b[$, $\vec{F}$ admet une dérivée d'ordre $n + 1$ dont la norme n'excède pas un réel positif donné K. Alors :**

$$(5) \quad \| \vec{F}(b) - \vec{F}(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(b - a)^k \vec{F}^{(k)}(a) \| \leqslant \frac{K}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}.$$

Soit $\vec{\Phi}$ l'application de $[a, b]$ dans E déterminée par

$$\vec{\Phi}(u) = \vec{F}(b) - \vec{F}(u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(b-u)^k \vec{F}^{(k)}(u).$$

On calcule : $\vec{\Phi}'(u) = -\frac{1}{n!}(b-u)^n \vec{F}^{(n+1)}(u)$.

On a donc : $\| \vec{\Phi}'(u) \| \leqslant g'(u)$, avec $g(u) = -\frac{K}{(n+1)!}(b-u)^{n+1}$.

En utilisant le lemme du 1°, on en déduit

$$\| \vec{\Phi}(b) - \vec{\Phi}(a) \| \leqslant \frac{K}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \text{ qui est (5).}$$

4° THÉORÈME DE TAYLOR-YOUNG. — **Si l'application $\vec{F}$ d'un voisinage de $u_0 \in R$ dans l'espace vectoriel réel normé E vérifie l'hypothèse**

(H_n) $\vec{F}$ est de classe C^{n-1} et $\vec{F}^{(n)}(u_0)$ existe,

alors $\vec{F}$ possède la propriété

$$(P_n) \quad \lim_{\omega \to 0} \frac{1}{\omega^n}\left(\vec{F}(u_0+\omega) - \vec{F}(u_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\omega^k \vec{F}^{(k)}(u_0)\right) = \vec{0}.$$

I. Le fait que (H_1) entraîne (P_1) est la définition même de $\vec{F}'(u_0)$.

II. Supposons démontré que (H_{n-1}) entraîne (P_{n-1}) et soit $\vec{F}$, qui vérifie (H_n).

On constate que $\vec{F}'$ vérifie (H_{n-1}) et, par suite, possède (P_{n-1}). A tout $\varepsilon > 0$, on sait associer $\alpha > 0$ tel que $|\omega| < \alpha$ entraîne une inégalité qui s'écrit

(6) $\| \vec{R}'(\omega) \| \leqslant \varepsilon |\omega|^{n-1}$, avec $\vec{R}(\omega) = \vec{F}(u_0+\omega) - \vec{F}(u_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\omega^k \vec{F}^{(k)}(u_0)$

ou encore : $\| \vec{R}'(\omega) \| \leqslant g'(\omega)$, avec

$$g(\omega) = \frac{\varepsilon}{n}\omega^n \text{ si } \omega \geqslant 0 \quad \text{et} \quad g(\omega) = -\frac{\varepsilon}{n}(-\omega)^n \text{ si } \omega \leqslant 0.$$

En utilisant le lemme du 1°, compte tenu de $\vec{R}(0) = \vec{0}$ et $g(0) = 0$, on constate que, pour $|\omega| < \alpha$, on a $\| \vec{R}(\omega) \| < \frac{\varepsilon}{n}|\omega|^n$, ce qui montre que ($P_n$) est vérifiée.

REMARQUE I. — **Il peut être commode de traduire (P_n) par le fait que la fonction $\vec{\varepsilon}$ définie pour $\omega \neq 0$ par l'égalité**

$$\vec{F}(u_0+\omega) = \vec{F}(u_0) + \frac{\omega}{1!}\vec{F}'(u_0) + \ldots + \frac{\omega^n}{n!}\left(\vec{F}^{(n)}(u_0) + \vec{\varepsilon}(\omega)\right)$$

admet la limite $\vec{0}$ quand ω tend vers 0.

REMARQUE II. — Si E a une dimension finie q, on obtient une démonstration plus simple en écrivant la formule de Taylor-Young pour chacune des coordonnées de $\vec{F}(u)$.

7. ***Intégration d'une application vectorielle.*** — 1° DÉFINITION. — **On dit que l'application $\vec{F}$ du segment réel $[a, b]$ dans l'espace vectoriel E, de dimension finie q, est intégrable sur $[a, b]$ quand les coordonnées f_k de $\vec{F}$ dans une base $\{\vec{e}_k\}$ de E sont des applications intégrables.**

Le vecteur

$$\sum_{k=1}^{q} \vec{e}_k \int_a^b f_k(u)\, du, \qquad \text{que l'on note} \qquad \int_a^b \vec{F}(u)\, du$$

est alors appelé intégrale de $\vec{F}$ sur $[a, b]$.

Cette définition est justifiée par le fait que le choix de la base est indifférent, ainsi que cela résulte d'une part de la linéarité des formules de changement de bases, d'autre part de la linéarité de l'intégrale d'une fonction numérique.

2° **Propriétés.** — *a*) **Si $\vec{F}$ est continue sur $[a, b]$, $\vec{F}$ est intégrable sur $[a, b]$.**

b) **Si $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont intégrables sur $[a, b]$ et si λ est un réel :**

I. $$\int_a^b \left[\lambda \vec{F}(u) + \vec{G}(u)\right] du = \lambda \int_a^b \vec{F}(u)\, du + \int_a^b \vec{G}(u)\, du.$$

II. $$\int_a^b \vec{F}(u)\, du = \int_a^c \vec{F}(u)\, du + \int_c^b \vec{F}(u)\, du, \qquad (c \in]a, b[).$$

Il s'agit de conséquences immédiates du 1° et des propriétés de l'intégrale simple.

3° **Intégrale de la norme.** — THÉORÈME. — **Si $\vec{F}$ est continue sur $[a, b]$ $a < b$, alors**

(1) $$\left\| \int_a^b \vec{F}(u) \right\| \leqslant \int_a^b \left\| \vec{F}(u) \right\| du.$$

La continuité de $\vec{F}$ entraîne (2, 1°) celle de $\| \vec{F} \|$, d'où l'existence des intégrales $\vec{I}$ et J de ces fonctions sur $[a, b]$.

Soit (d) une subdivision de $[a, b]$ en sous-segments $[u_{i-1}, u_i]$, avec $u_{i-1} < u_i$, à laquelle on associe des points $\lambda_i \in [u_{i-1}, u_i]$. On constate, en passant par l'intermédiaire des composantes en ce qui concerne la fonction vectorielle, que $\vec{I}$ et J sont les limites, quand le module de (d) tend vers 0 (au sens indiqué au n° 86 du tome II) des sommes

$$\vec{W} = \sum (u_i - u_{i-1})\, \vec{F}(\lambda_i), \qquad S = \sum (u_i - u_{i-1}) \left\| \vec{F}(\lambda_i) \right\|.$$

De : $\| \vec{W} \| \leqslant S$, on déduit, par passage à la limite : $\| \vec{I} \| \leqslant J$.

4° **Primitives d'une fonction vectorielle.** — Par recours aux composantes, on obtient en utilisant l'étude faite au n° 91 du tome II :

THÉORÈME. — **Si $\vec{F}$ est une fonction vectorielle intégrable sur $[a, b]$, alors la fonction**

$$u \longrightarrow \vec{\Phi}(u) = \int_a^u \vec{F}(t)\,dt$$

est continue sur $[a, b]$. Si, en outre, $\vec{F}$ est continue, alors $\vec{\Phi}$ est dérivable et $\vec{\Phi}'(u) = \vec{F}(u)$.

THÉORÈME. — **Étant donnée la fonction vectorielle $\vec{F}$ continue sur $[a, b]$, il existe des fonctions vectorielles définies sur $[a, b]$ et y admettant $\vec{F}$ pour dérivée. Elles sont dites primitives de $\vec{F}$ sur $[a, b]$; il s'agit des fonctions de la forme**

$$u \longrightarrow \vec{C} + \int_a^u \vec{F}(t)\,dt.$$

Si $\vec{G}$ est l'une quelconque de ces fonctions on a donc

$$\vec{G}(b) - \vec{G}(a) = \int_a^b \vec{F}(t)\,dt.$$

REMARQUE. — Par un changement de notation, on en déduit que si $\vec{F}$ est continûment dérivable sur $[a, b]$, on a :

$$\vec{F}(b) - \vec{F}(a) = \int_a^b \vec{F}'(t)\,dt.$$

Il résulte du 3° que, si $a < b$, on peut écrire

$$\| \vec{F}(b) - \vec{F}(a) \| \leqslant \int_a^b \| \vec{F}'(t) \|\,dt.$$

5° **Formule de Taylor avec reste intégral.** — THÉORÈME. — **Soit $\vec{F}$ une application de classe C^{n+1} d'un intervalle réel $\mathfrak{I}$ dans un espace vectoriel de dimension finie, E, et soit a un point de $\mathfrak{I}$. Pour tout $u \in \mathfrak{I}$, on a :**

$$(2)\quad \vec{F}(u) = \vec{F}(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(u-a)^k \vec{F}^{(k)}(a) + \int_a^u \frac{1}{n!}(u-t)^n \vec{F}^{(n+1)}(t)\,dt.$$

En effet, $u \in \mathfrak{I}$ étant fixé, l'application $\vec{\Phi}$ de $\mathfrak{I}$ dans E telle que

$$\vec{\Phi}(t) = \vec{F}(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(u-t)^k \vec{F}^{(k)}(t),$$

admet la dérivée continue $\vec{\Phi}'$ telle que $\vec{\Phi}'(t) = \frac{1}{n!}(u-t)^n \vec{F}^{(n+1)}(t)$.

(2) n'est autre que : $\vec{\Phi}(u) = \vec{\Phi}(a) + \int_a^u \vec{\Phi}'(t)\,dt$.

Naturellement, la formule est valable pour une application numérique (c'est le cas où $E = R$).

EXERCICES

1. — Soit E un espace vectoriel normé, non réduit à son vecteur nul. Montrer qu'il n'existe pas deux applications linéaires continues f et g de E dans E vérifiant

(1) $$g \circ f - f \circ g = e, \qquad (e : \text{identité de E})$$

• On montrera que (1) impliquerait

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \qquad g \circ f^{n+1} - f^{n+1} \circ g = (n+1) f^n$$

ce qui exigerait $|||\, f \,||| = 0$ et conduirait à une contradiction.

• On retrouvera le résultat par voie matricielle, dans le cas où E a une dimension finie.

2. — Soient E et F deux espaces vectoriels normés et soit f une application de E dans F vérifiant les deux conditions :

a) $$\left(\forall \vec{X}, \vec{X}' \in E\right) \qquad f\left(\vec{X} + \vec{X}'\right) = f\left(\vec{X}\right) + f\left(\vec{X}'\right),$$

b) Il existe $$\alpha = \sup_{\|\vec{Z}\| \leq 1} N\left(f\left(\vec{Z}\right)\right)$$

Montrer que f est linéaire et continue. Pour cela :

• on vérifiera $f\left(r\vec{X}\right) = r f\left(\vec{X}\right)$, pour r rationnel,

• On considérera un vecteur non nul $\vec{X}$ de E et un réel λ; on introduira une suite sur Q, $\{ r_n \}$, telle que

$$(\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}) \quad n\,|\, r_n - \lambda \,|\, \|\vec{X}\| \leqslant 1$$

et on utilisera un majorant de

$$N\left(f\left(\lambda\vec{X} + \vec{Y}\right) - f\left(\lambda\vec{X}\right)\right) \qquad \text{avec} \qquad \vec{Y} = (r_n - \lambda)\vec{X}$$

3. — Soit E l'ensemble des applications lipschitziennes de [0, 1] dans R. A tout élément f de E on peut ainsi associer un réel positif, $k(f)$, tel que

$$(\forall x, y \in [0, 1]) \qquad |f(y) - f(x)| \leqslant k(f) \cdot |y - x|$$

a) Montrer que $|f|$ admet une borne supérieure, que l'on notera $M(f)$. On posera :

$$N(f) = k(f) + M(f).$$

b) Montrer que E est un espace vectoriel sur R.

c) Montrer que M et N sont des normes sur E et que ces normes ne sont pas équivalentes.

4. — Soit $\vec{F}$ une application à dérivée bornée de l'intervalle réel $]a, b[$, $a < b$, dans l'espace vectoriel R^q. Montrer que $\vec{F}$ admet une limite à droite au point a et une limite à gauche au point b.

5. — Soit $\vec{F}$ une application continue de l'intervalle réel $]a, b[$, $a < b$, dans R^q admettant en tout point u de $]a, b[$ une dérivée à droite $\vec{F}'_d(u)$.

a) On suppose en outre que $\vec{F}'_d$ admet une limite $\vec{L}$ au point u_0 de $]a, b[$. Montrer que $\vec{F}$ admet $\vec{L}$ pour dérivée à gauche au point u_0.

b) En déduire que si $\vec{F}'_d$ est continue sur $]a, b[$, alors $\vec{F}$ est dérivable sur $]a, b[$.

6. — Soit $\vec{F}$ une application indéfiniment dérivable de R dans un espace vectoriel normé. Montrer que, pour tout réel non nul u et pour tout naturel n, on a

$$\frac{1}{u^{n+1}} \vec{F}^{(n)}\left(\frac{1}{u}\right) = (-1)^n \left[u^{n-1} \vec{F}\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{(n)}$$

7*. — Soit f une application indéfiniment dérivable du segment réel $[-a + a]$ dans R, telle que f et ses dérivées d'ordres pairs ne prennent que des valeurs positives ou nulles. On se propose de montrer que f est développable en série entière.

a) On pose : $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $I_n(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} g^{(2k)}(0)$

Montrer : $$I_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} g^{(2n+2)}(t)\, dt$$

En déduire : $$0 \leqslant I_n(x) \leqslant \left|\frac{x}{a}\right|^{2n+1} I_n(a) \leqslant \left|\frac{x}{a}\right|^{2n+1} g(a)$$

Montrer que g est la somme de sa série de Mac Laurin.

b) Étudier de la même façon la fonction h telle que $h(x) = f(x) - f(-x)$ et conclure.

8*. — En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que la fonction $x \longrightarrow \operatorname{tg} x$ est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

CHAPITRE II

NOTION DE COURBE

I. NOTION D'ARC GÉOMÉTRIQUE

8. *Généralités.* — Dans toute la suite de l'ouvrage $\mathcal{E}_2$ (resp. $\mathcal{E}_3$) désigne, sous le vocable de plan (resp. espace) de la géométrie élémentaire un espace affine de dimension 2 (resp. 3) attaché à un espace vectoriel réel $\vec{\mathcal{E}}_2$ (resp. $\vec{\mathcal{E}}_3$). Nous utiliserons les notations $\mathcal{E}$ et $\vec{\mathcal{E}}$ quand il n'y aura pas lieu de préciser la dimension.

Nous choisissons, une fois pour toutes, une origine O de $\mathcal{E}$, de façon à disposer d'une bijection $\vec{X} \longrightarrow M = O + \vec{X}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{E}$.

Nous munissons $\vec{\mathcal{E}}$ d'une norme, notée $\| \ \|$ et de la distance associée $d(\vec{X}, \vec{X}') = \| \vec{X}' - \vec{X} \|$; il en résulte que $d(M, M') = \| \overrightarrow{MM'} \|$ est une distance sur $\mathcal{E}$; nous savons que, s'agissant d'espaces de dimension finie, les topologies de $\vec{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{E}$ ainsi obtenues sont indépendantes du choix de $\| \ \|$.

De cette façon l'étude des deux applications

$$u \longrightarrow \vec{X} = \vec{F}(u) \qquad \text{et} \qquad u \longrightarrow M = O + \vec{F}(u),$$

(que nous écrivons $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u)$) d'un même sous-ensemble $\mathfrak{D}$ de R, ou plus généralement de R^p, respectivement dans $\mathcal{E}$ et $\vec{\mathcal{E}}$ se ramènent aisément l'une à l'autre.

Nous utiliserons une base de $\vec{\mathcal{E}}$, qui sera notée suivant le cas $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ ou $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ et nous rapporterons $\mathcal{E}$ au repère d'origine O associé à la base, ce qui nous conduira à écrire, suivant le cas

$$\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \vec{F}(u) = f(u)\vec{i} + g(u)\vec{j}$$

$$\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \text{et} \qquad \vec{F}(u) = f(u)\vec{i} + g(u)\vec{j} + h(u)\vec{k}.$$

Pour l'étude de certaines questions, il sera nécessaire de supposer que $\vec{\mathcal{E}}$ et, par suite, $\mathcal{E}$ ont été munis d'une structure euclidienne. Nous disposerons alors d'une norme privilégiée, la *norme euclidienne* (que l'on pourra appeler *longueur*) et de la notion d'*orthogonalité*.

9. *Limite d'une droite.* — 1° Distance de deux droites. — $\mathfrak{D}$ désigne soit l'ensemble des droites vectorielles de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$, soit l'ensemble des droites de l'espace affine $\mathcal{E}$ qui ont un point commun donné. La norme $\| \ \|$ de $\vec{\mathcal{E}}$ ayant été choisie, nous disposons pour chaque élément D de $\mathfrak{D}$ de deux vecteurs unitaires opposés, $\vec{u}_D$ et $-\vec{u}_D$, qui constituent un ensemble $\mathfrak{U}_D$.

2° THÉORÈME. — **L'application δ de $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ dans $\mathbf{R}_+$ déterminée par**

$$\delta(D, D') = \inf \| \vec{v}' - \vec{v} \|, \qquad \vec{v} \in \mathfrak{U}_D, \qquad \vec{v}' \in \mathfrak{U}_{D'}$$

est une distance sur $\mathfrak{D}$.

Il est bien évident que, d'une part $\delta(D, D')$ n'est nul que si $D = D'$, d'autre part $\delta(D', D) = \delta(D, D')$.

Soient D, D', D'' trois droites de $\mathfrak{D}$. On peut supposer que la dénomination des vecteurs unitaires a été choisie de telle sorte que (fig. 4) :

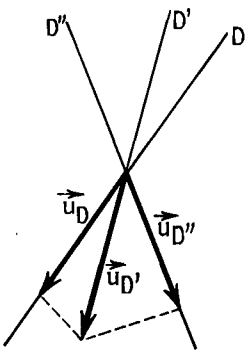


Fig. 4.

$$\delta(D, D') = \| \vec{u}_{D'} - \vec{u}_D \|$$

et
$$\delta(D', D'') = \| \vec{u}_{D''} - \vec{u}_{D'} \|.$$

De :
$$\delta(D, D'') \leqslant \| \vec{u}_{D''} - \vec{u}_D \|$$
$$\leqslant \| \vec{u}_D - \vec{u}_{D'} \| + \| \vec{u}_{D'} - \vec{u}_D \|$$

on déduit :
$$\delta(D, D'') \leqslant \delta(D, D') + \delta(D', D'').$$

La proposition en résulte.

2° Muni de cette distance δ, $\mathfrak{D}$ est un espace métrique dans lequel la boule ouverte de centre D_0, de rayon r est le « cône » ensemble des droites $D \in \mathfrak{D}$ telles que $\delta(D_0, D) < r$.

REMARQUE. — L'application ψ de l'ensemble des vecteurs unitaires de $\vec{\mathcal{E}}$ dans l'espace métrique $(\mathfrak{D}, \delta)$ telle que $\psi(\vec{u})$ est la droite dirigée par $\vec{u}$ est uniformément continue. En effet

$$(\forall \varepsilon > 0) \qquad \| \vec{u}' - \vec{u}'' \| < \varepsilon \implies \delta\left(\psi(\vec{u}'), \psi(\vec{u}'')\right) < \varepsilon.$$

3° Propriété de la limite. — Soit $t \multimap \vec{F}(t)$ une application d'un sous-ensemble $\mathfrak{I}$ de R dans $\vec{\mathcal{E}} - \{\vec{0}\}$. En associant à $\vec{F}(t)$ la droite $D(t)$ dirigée par le vecteur non nul $\vec{F}(t)$, on détermine une application $t \multimap D(t)$ de $\mathfrak{I}$ dans l'espace métrique $(\mathfrak{D}, \delta)$.

THÉORÈME. — **Si $\vec{F}$ admet la limite $\vec{L} \neq \vec{0}$ au point a, adhérent à $\mathfrak{I}$, alors D admet pour limite au point a la droite Δ de $\mathfrak{D}$ qui est dirigée par $\vec{L}$.**

Posons $\vec{u}(t) = \dfrac{\vec{F}(t)}{\|\vec{F}(t)\|}$ et $\vec{l} = \dfrac{\vec{L}}{\|\vec{L}\|}$.

D'après la continuité de la norme : $\vec{l} = \lim_{t \to a} \vec{u}(t)$.

La proposition résulte alors de la continuité de la fonction ψ du 2°.

REMARQUE. — Le fait que $\vec{F}$ admette $\vec{L}$ pour limite au point a ne dépend pas du choix de $\| \ \|$; on en déduit que la topologie de l'espace métrique $\mathfrak{D}$ introduite aux 1° et 2° est, tout comme celles de $\vec{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{E}$, indépendante du choix de la norme de $\vec{\mathcal{E}}$.

10. ***Limite d'un plan*** — 1° **Distance de deux plans.** — $\mathcal{H}$ désigne soit l'ensemble des plans vectoriels de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}_3$, soit l'ensemble des plans de l'espace affine $\mathcal{E}_3$ qui ont un point commun donné.

Nous savons (III, 61, 2°) que tout $H \in \mathcal{H}$ peut être représenté par une équation $h(\vec{X}) = 0$, dans laquelle h est une forme linéaire sur $\vec{\mathcal{E}}_3$, non nulle, déterminée à une constante multiplicative près. A tout $H \in \mathcal{H}$ correspond donc biunivoquement le sous-espace vectoriel (ou droite vectorielle) Φ du dual $\vec{\mathcal{E}}_3^*$ de $\vec{\mathcal{E}}_3$ constitué par la forme nulle et par les formes h telles que $h(\vec{X}) = 0$ représente H.

Nous appellerons distance des plans H et H' de $\mathcal{H}$ la distance des droites Φ et Φ' de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}_3^*$, de dimension 3, telle qu'elle a été définie au n° 9. Nous disposons ainsi d'une topologie de $\mathcal{H}$, indépendante du choix de la norme de $\vec{\mathcal{E}}_3$.

ÉTUDE PRATIQUE. — Rapportons $\vec{\mathcal{E}}_3$ à une base $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ arbitrairement choisie et $\vec{\mathcal{E}}_3^*$ à la base duale $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{B}$. Aux plans H et H' de $\mathcal{H}$ dont des équations sont

$$ux + vy + wz = 0 \qquad \text{et} \qquad u'x + v'y + w'z = 0$$

sont associées les droites Φ et Φ' de $\vec{\mathcal{E}}_3^*$ respectivement dirigées par les formes linéaires non nulles h et h' dont les coordonnées dans $\mathcal{B}^*$ sont (u, v, w) et (u', v', w'). La distance de H à H', qui est celle de Φ à Φ', est ainsi la distance des droites de $\vec{\mathcal{E}}_3$ dirigées par les vecteurs $\vec{N}$ et $\vec{N}'$ dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont

$$(u, v, w) \qquad \text{et} \qquad (u', v', w').$$

Notons que, dans le cas de $\vec{\mathcal{E}}_3$ euclidien et d'une base $\mathcal{B}$ orthonormée, ces droites sont respectivement perpendiculaires à H et H'.

REMARQUE. — Par restriction, dans $\vec{\mathcal{E}}_2$ rapporté à la base $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ on pourrait adopter pour distance des droites D et D' d'équations

$$ux + vy = 0 \qquad \text{et} \qquad u'x + v'y = 0$$

respectivement dirigées par les vecteurs $(v, -u)$ et $(v', -u')$ au lieu de la distance δ du n° 9 la distance δ' (au sens du n° 9) des droites dirigées par les vecteurs (u, v) et (u', v'). Le lecteur vérifiera aisément que, dans le cas de la norme

$$\| (\xi, \eta) \| = \sup (|\xi|, |\eta|)$$

les deux distances sont égales. Les deux topologies sont donc les mêmes.

2° **Propriété de la limite.** — THÉORÈME. — **Si les applications $\vec{F}$ et $\vec{G}$ de $\mathfrak{I} \subset \mathbf{R}$ admettent, au point a adhérent à $\mathfrak{I}$, les limites $\vec{L}$ et $\vec{M}$, non nulles et non colinéaires, alors le plan $H(t)$ de $\vec{\mathcal{E}}_3$ dont une base est $\{\vec{F}(t), \vec{G}(t)\}$ admet pour limite au point a le plan Π de $\vec{\mathcal{E}}_3$ dont une base est $\{\vec{L}, \vec{M}\}$.**

La base $\mathcal{B}$ de $\vec{\mathcal{E}}_3$ ayant été arbitrairement choisie, posons

$$\vec{F}(t) = \alpha(t)\vec{i} + \beta(t)\vec{j} + \gamma(t)\vec{k}, \qquad \vec{G}(t) = \lambda(t)\vec{i} + \mu(t)\vec{j} + \nu(t)\vec{k}$$
$$\vec{L} = \alpha_0\vec{i} + \beta_0\vec{j} + \gamma_0\vec{k}, \qquad \vec{M} = \lambda_0\vec{i} + \mu_0\vec{j} + \nu_0\vec{k}.$$

En utilisant s'il y a lieu des restrictions, on peut supposer que, pour tout $t \in \mathfrak{I}$, les deux vecteurs $\vec{F}(t)$ et $\vec{G}(t)$ ne sont ni nuls, ni colinéaires. Ils définissent alors le plan $H(t)$ d'équation

$$u(t)\,x + v(t)\,y + w(t)\,z = 0,$$

avec : $\qquad u = \beta\nu - \gamma\mu, \qquad v = \gamma\lambda - \alpha\nu, \qquad w = \alpha\mu - \beta\lambda.$

Les fonctions $\alpha, \ldots, \nu$ admettent les limites respectives $\alpha_0, \ldots, \nu_0$. Les fonctions u, v, w admettent donc les limites $\beta_0\nu_0 - \gamma_0\mu_0$, $\gamma_0\lambda_0 - \alpha_0\nu_0$, $\alpha_0\mu_0 - \beta_0\lambda_0$. Le plan H admet pour limite le plan d'équation

$$(\beta_0\nu_0 - \gamma_0\mu_0)\,x + (\gamma_0\lambda_0 - \alpha_0\nu_0)\,y + (\alpha_0\mu_0 - \beta_0\lambda_0)\,z = 0$$

qui n'est autre que Π.

11. ***Arc simple de classe*** C^k. — Nous nous proposons d'étudier l'image d'un intervalle réel I par une application continue $\vec{F}$ de I dans l'espace affine $\mathcal{E}$. Depuis que Péano a exhibé une application continue de [0, 1] dans $\mathcal{E}_2$ euclidien dont l'image est l'ensemble des points d'un carré, on ne peut plus dire que $\vec{F}(I)$ est une *courbe*, au sens vulgaire du mot. Afin d'aboutir à une notion de courbe, nous allons reprendre, en la complétant, la notion d'arc paramétré d'un espace métrique que nous avons introduite au n° **287**, 6° du tome II.

1° Nous aurons à utiliser :

DÉFINITION. — **Étant donné le naturel k et les intervalles réels I et J, on dit qu'une application φ de J sur I est un difféomorphisme de classe C^k (ou, en abrégé,**

un C^k-difféomorphisme) quand φ est bijective, de classe C^k, la bijection réciproque. φ^{-1} étant, elle aussi, de classe C^k.

Il va de soi que φ^{-1} est alors un C^k-difféomorphisme de I sur J. Par ailleurs, dans la mesure où une application continue est considérée comme de classe C^0 on peut dire, pour harmoniser le langage, qu'un homéomorphisme est un C^0- difféomorphisme.

THÉORÈME. — **La bijection φ de J sur I, de classe C^k, $(k \geqslant 1)$, est un C^k-difféomorphisme si et seulement si l'application continue φ' ne prend pas la valeur 0 (ce qui signifie que $\varphi'(t)$ conserve un signe fixe quand t décrit J).**

Pour $k = 1$, la proposition résulte de l'étude de l'application réciproque (II, 59, 70).

Pour $k > 1$, la nécessité de la condition résulte de ce qu'un C^k-difféomorphisme est un C^1-difféomorphisme; sa suffisance a été démontrée au n° 165 du tome II (exemple III).

2° DÉFINITION. — **On appelle arc paramétré de classe C^k, $(k \geqslant 0)$, et on note $(I, \vec{F})$ toute application $u \longrightarrow \vec{F}(u)$ de classe C^k d'un intervalle réel I dans l'espace affine $\mathcal{E}$.**

$\Gamma = \vec{F}(I)$ est le *support* de l'arc paramétré. Dans le cas où I est un segment, Γ est l'image directe d'un compact (resp. connexe) par une application continue; c'est donc un compact (resp. connexe) et, par suite une partie bornée de $\mathcal{E}$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la proposition suivante :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Dans l'ensemble des arcs paramétrés de classe C^k de $\mathcal{E}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ « $(I, \vec{F})$ $\mathcal{R}$ $(J, \vec{G})$ signifie qu'il existe un C^k-difféomorphisme φ de J sur I tel que $\vec{G} = \vec{F} \circ \varphi$ » est une relation d'équivalence. Toute classe d'équivalence $\mathcal{A}$, est dite arc géométrique de classe C^k.**

Chacun des arcs paramétrés de classe C^k qui constituent $\mathcal{A}$ est dit *représentation paramétrique* (ou *paramétrage*) *admissible* de $\mathcal{A}$; le support commun de ces arcs est dit support de $\mathcal{A}$.

Les notions d'*orientation d'un arc géométrique*, de *point multiple*, d'*arc simple*, exposées au n° 287, 6° du tome II s'étendent sans difficulté des arcs de classe C^0 aux arcs de classe C^k; elles jouent un grand rôle dans tout ce qui va suivre.

En particulier, quand nous dirons que nous nous donnons dans $\mathcal{E}$ un arc simple Γ de classe C^k (éventuellement orienté), nous entendrons que Γ désigne le support d'un arc géométrique donné $\mathcal{A}$, de classe C^k (éventuellement orienté), dont un paramétrage admissible est une application injective; tous les paramétrages admissibles sont alors des applications injectives; l'un de ces paramétrages sera utilisé pour déterminer Γ.

12. *Courbe continue.* — 1° **Définition.** — Soit Γ l'image dans $\mathcal{E}$ d'un segment $[a, b]$ de R par une fonction vectorielle continue $\vec{F}$ telle que $[a, b]$ puisse être subdivisé en un nombre fini n de sous-segments $[a_{i-1}, a_i]$ dont les images par $\vec{F}$ sont des arcs simples continus Γ_i. On dit alors que Γ est une *courbe continue.*

En bref, **une courbe continue est une succession d'arcs simples continus Γ_i.**

Si la fonction vectorielle $\vec{F}$ qui engendre la courbe continue Γ est dérivable [resp. continûment dérivable] on dit que la courbe continue Γ est dérivable [resp. continûment dérivable].

REMARQUE. — Il n'est pas exclu que deux arcs simples consécutifs de Γ soient confondus.

Par exemple l'image de $[0, 4\pi]$ par la fonction vectorielle continue

$$\vec{F}(u) \begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \end{cases}$$

comprend deux arcs simples continus fermés.

a) l'image par $\vec{F}$ de $[0, 2\pi]$ *b*) l'image par $\vec{F}$ de $[2\pi, 4\pi]$,
mais ces deux arcs sont confondus.

Ces considérations justifient les définitions suivantes :

2° **Représentation propre.** — Soit la courbe continue Γ image de $[a, b]$ par $\vec{F}$. Soit M_0 un point de Γ, obtenu pour la valeur $u_0 \in [a, b]$:

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{F}(u_0).$$

L'équation qui permet d'obtenir toutes les valeurs u conduisant au même point M_0 est

$$\vec{F}(u) = \vec{F}(u_0). \tag{1}$$

a) Si, u_0 étant choisi de façon quelconque dans $[a, b]$, l'équation (1) n'admet que la solution u_0, on dit que la représentation de Γ est *propre*; le point M_0 est dit *point simple* de Γ.

b) Si, u_0 étant choisi de façon quelconque dans $[a, b]$, il existe au moins une valeur $u_1 \in [a, b]$, distincte de u_0, qui soit solution de (1), on dit que la représentation de Γ par $\vec{F}$ est *impropre.*

Il en est de même si la propriété $\vec{F}(u_1) = \vec{F}(u_0)$, $u_1 \neq u_0$, est réalisée seulement sur un sous-segment de $[a, b]$.

c) **Lorsque la représentation de Γ est propre, il peut se faire que, pour des valeurs exceptionnelles u_0 prises dans $[a, b]$, l'équation (1) ait un nombre p de solutions supérieur à 1; on dit alors que M_0 est un** *point multiple* d'ordre p de Γ.

L'entier naturel p est au plus égal au nombre n d'arcs simples continus dont se compose Γ.

La figure 5 montre une courbe continue formée de 3 arcs simples continus, Γ_1 (ou $\widehat{A_0A_1}$), Γ_2 (ou $\widehat{A_1A_2}$), Γ_3 (ou $\widehat{A_2A_3}$); M_0 est un point triple, M_0' est un point double.

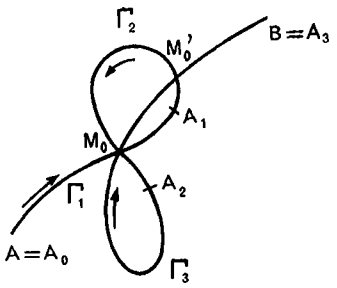


FIG. 5.

En bref, *on dit qu'une courbe continue* Γ *est représentée de façon propre par le paramètre u, s'il y a correspondance biunivoque entre tout point* M *de* Γ *et la valeur associée u du paramètre :*

$$M \longleftrightarrow u \qquad \overrightarrow{OM} = \vec{F}(u)$$

sauf pour les points multiples de Γ.

Moyennant quelques précautions les notions de changement de paramètre et d'orientation s'étendent à une courbe continue Γ.

EXEMPLES. — Voir les nos 26, 7°; 28, ex. I, Rq III; 28, ex. IV; 28, ex. V.

II. TANGENTE

13. ***Notion de sous-espaces fondamentaux.*** — 1° **Position du problème.** — Dans le présent sous-paragraphe, nous nous donnons un arc géométrique de classe C^k, $\mathcal{A}$, de $\mathcal{E}$, *simple*, ce qui signifie que l'un des paramétrages admissibles de $\mathcal{A}$ est un arc paramétré simple; il en est alors de même de tout autre paramétrage admissible (le produit d'une bijection et d'une injection étant une injection). Nous nous donnons en outre un point M du support Γ de $\mathcal{A}$. Nous nous proposons de montrer que le couple (Γ, M) possède des propriétés indépendantes du choix du paramétrage admissible.

2° **Sous-espaces fondamentaux.** — Soit $\left(I, \vec{F}\right)$ un paramétrage admissible de $\mathcal{A}$, dans lequel M correspond à la valeur u du paramètre. Désignons par $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_k$ les sous-espaces vectoriels de $\vec{\mathcal{E}}$ tels que $\mathcal{V}_i$, $(1 \leqslant i \leqslant k)$, soit engendré par le système de vecteurs $\left(\vec{F}'(u), \ldots, \vec{F}^{(i)}(u)\right)$.

Nous allons montrer que ces sous-espaces sont indépendants du choix de $\left(I, \vec{F}\right)$, ce qui permettra de les qualifier de *sous-espaces fondamentaux attachés au point* M *de* Γ.

Soit $\left(J, \vec{G}\right)$ un second paramétrage admissible de $\mathcal{A}$, dans lequel M est obtenu pour la valeur t du paramètre. On sait qu'il existe un C^k-difféomorphisme φ de J sur I, tel que $\vec{G} = \vec{F} \circ \varphi$. Les dérivées successives de $\vec{G}$ au point t s'expriment au moyen de celles de $\vec{F}$ au point u de la façon suivante

$$\begin{cases} \vec{G}'(t) = \vec{F}'(u)\,\varphi'(t), & \text{(avec d'ailleurs } \varphi'(t) \neq 0) \\ \vec{G}''(t) = \vec{F}''(u)\,(\varphi'(t))^2 + \vec{F}'(u)\,\varphi''(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \vec{G}^{(i)}(t) = \vec{F}^{(i)}(u)\,(\varphi'(t))^i + \ldots + \vec{F}'(u)\,\varphi^{(i)}(t). \end{cases}$$

Il en résulte que le sous-espace de $\vec{\mathcal{E}}$ engendré par $\left(\vec{G}'(t), \ldots, \vec{G}^{(i)}(t)\right)$ est inclus dans $\mathcal{V}_i$ et que, compte tenu du rôle symétrique des deux paramétrages, il est confondu avec $\mathcal{V}_i$, ce qu'il s'agissait d'établir.

Notons que $\vec{F}'(u)$ et $\vec{G}'(t)$ ont le même sens ou des sens contraires selon que $\varphi'(t) > 0$ ou $\varphi'(t) < 0$. En particulier si l'arc est orienté et si les deux paramétrages appartiennent à la même classe, les deux vecteurs-dérivés ont le même sens.

3° **Point ordinaire, point stationnaire.** — Nous avons, au sens large

$$\left\{\vec{0}\right\} \subset \mathcal{V}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{V}_i \subset \ldots \subset \mathcal{V}_k.$$

DÉFINITION. — **Selon que $\mathcal{V}_1 \neq \left\{\vec{0}\right\}$ ou que $\mathcal{V}_1 = \left\{\vec{0}\right\}$ on dit que M est un point ordinaire ou un point stationnaire de Γ.**

En d'autres termes, un point stationnaire est un point qui correspond à une valeur du paramètre telle que le premier vecteur dérivé soit nul et cela quel que soit le choix du paramétrage admissible. S'il s'agit de $\left(I, \vec{F}\right)$, un point stationnaire (dont la présence est exceptionnelle) sera caractérisé par l'existence de $u \in I$ tel que, simultanément :

dans le cas de $\mathcal{E}_2$:	dans le cas de $\mathcal{E}_3$:
$f'(u) = 0, \quad g'(u) = 0$	$f'(u) = 0, \quad g'(u) = 0, \quad h'(u) = 0.$

4° **Étude théorique.** — Pourvu que k soit assez grand, ce que nous supposons systématiquement, nous constatons que (à moins que tous les vecteurs dérivés au point M ne soient nuls) :

a) Il existe p, plus petit naturel tel que $1 \leqslant p \leqslant k$ et dim $\mathcal{V}_p = 1$. La droite de $\mathcal{E}$ dont un point est M et dont la direction est $\mathcal{V}_p$ sera introduite au n° 14 sous le nom de *tangente* en M à Γ.

b) Il existe p et q, plus petits entiers naturels tels que $1 \leqslant p < q \leqslant k$, dim $\mathcal{V}_p = 1$, dim $\mathcal{V}_q = 2$. Le plan de $\mathcal{E}$ dont un point est M et dont la direction est $\mathcal{V}_q$ sera introduit au n° 32 sous le nom de *plan osculateur* en M à Γ.

5° **Étude pratique.** — Choisissons, une fois pour toutes, un paramétrage admissible $(I, \vec{F})$, étant entendu que notre choix n'influera en rien sur les résultats. Déterminons, par leurs coordonnées, les vecteurs dérivées successives « au point M »

$$\vec{v}_1 = \vec{F}(u), \qquad \vec{v}_2 = \vec{F}''(u), \quad \dots$$

p est le premier entier tel que $\vec{v}_p \neq \vec{0}$, q est le premier entier supérieur à p tel que $\vec{v}_q$ ne soit ni nul, ni colinéaire à $\vec{v}_p$.

Le point générique M_1 de Γ est repéré par une valeur du paramètre que nous noterons $u + \omega$, c'est-à-dire par

$$\overrightarrow{OM_1} = \vec{F}(u + \omega), \qquad u + \omega \in I.$$

L'égalité $\overrightarrow{MM_1} = \vec{F}(u + \omega) - \vec{F}(u)$ permet d'écrire par la formule vectorielle de Taylor, pour tout naturel n tel que $1 \leqslant n \leqslant k$,

$$\overrightarrow{MM_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega^i}{i!} \vec{v}_i + \frac{\omega^n}{n!} \vec{\varepsilon}_n, \qquad \lim_{\omega \to 0} \vec{\varepsilon}_n = \vec{0},$$

en tenant compte, éventuellement, des vecteurs nuls qui figurent au second membre.

REMARQUE. — Dans la mesure où l'intervalle I est fermé, ce que nous pouvons supposer en utilisant s'il y a lieu une restriction, $\vec{F}$ est une bijection continue du compact I sur le compact Γ (muni de la distance induite de celle de $\mathcal{E}$); il s'agit donc (II, 285, 3°) d'un homéomomorphisme; la bijection réciproque $M_1 \longrightarrow u + \omega$ est aussi un homéomorphisme.

14. ***Tangente.*** — Nous reprenons les notations du n° 13.

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit Γ le support d'un arc géométrique simple de classe C^k de l'espace affine $\mathcal{E}$ et soit M un point de Γ. Nous nous plaçons dans le cas où existe p, plus petit entier positif tel que, en M, le sous-espace fondamental $\mathcal{V}_p$ ait la dimension 1, étant entendu que, dans le cas usuel, $p = 1$; nous désignons par T la droite de $\mathcal{E}$ dont un point est M et dont la direction est $\mathcal{V}_p$. Alors la droite D_{M_1} de $\mathcal{E}$ déterminée par M et par le point générique M_1 de Γ — { M { tend vers T quand M_1 tend vers M. On dit que T est la tangente en M à Γ.**

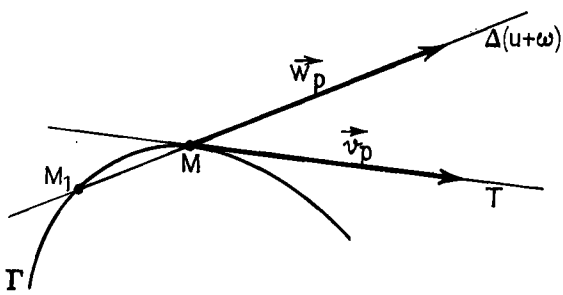


FIG. 6.

Soit $\mathcal{D}$ l'espace métrique des droites de $\mathcal{E}$ dont un point est M. D'après

le caractère bijectif de $\vec{F}$, nous disposons d'une application Δ de $I - \{u\}$ dans $\mathfrak{D}$, qui associe au point $u + \omega$, $\omega \neq 0$, la droite D_{M_1}, notée $\Delta(u + \omega)$, déterminée par le point M et le point M_1 (fig. 6). D'après la formule de Taylor à l'ordre p, nous avons, compte tenu de la nullité des vecteurs dérivés d'ordres i tels que $i < p$,

$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{\omega^p}{p!}\vec{w}_p \qquad \text{avec} \qquad \lim_{\omega \to 0} \vec{w}_p = \vec{v}_p.$$

Les vecteurs $\vec{w}_p$ et $\vec{v}_p$ dirigent respectivement $\Delta(u + \omega)$ et T. D'où (9, 3°) :

$$\lim_{\omega \to 0} \Delta(u + \omega) = T.$$

En écrivant $D_{M_1} = \Delta\left((\vec{F})^{-1}(M_1)\right)$ et en utilisant la continuité de $(\vec{F})^{-1}$ mise en évidence à la fin du n° 13 on obtient la proposition (cf. limite d'une application composée, n° 1, 3°).

REMARQUE. — Si au point stationnaire M tous les vecteurs $\vec{v}_k$ existent mais sont nuls, on ne peut rien conclure quant à l'existence d'une tangente en M à Γ, c'est-à-dire d'une limite de la droite D_{M_1} quand M_1 tend vers M (cf. exercice de la page 43).

2° **Représentation cartésienne de la tangente.** — Limitons-nous au cas usuel où M est un point ordinaire de Γ $(p = 1$, c'est-à-dire $\vec{v}_1 \neq \vec{0})$; T est alors la droite de $\mathcal{E}$ dont un point est M et dont la direction contient $\vec{v}_1$. Dans le repère considéré au n° 8, T est la droite

- d'équation : $\dfrac{X - f(u)}{f'(u)} = \dfrac{Y - g(u)}{g'(u)}$ dans le cas de $\mathcal{E}_2$
- d'équations : $\dfrac{X - f(u)}{f'(u)} = \dfrac{Y - g(u)}{g'(u)} = \dfrac{Z - h(u)}{h'(u)}$ dans le cas de $\mathcal{E}_3$.

Quand aucune confusion ne sera à craindre, nous écrirons x pour $f(u)$, x' pour $f'(u)$ et ainsi de suite.

15. ***Sécantes et plans sécants.*** — 1° Plaçons-nous au point M en lequel la tangente T à Γ est dirigée par le vecteur non nul $\vec{v}_p$ (il s'agit d'un point ordinaire si $p = 1$, d'un point stationnaire si $p > 1$). Nous appellerons :

sécante Δ en M toute droite de $\mathcal{E}_2$ dont un point est M, distincte de T; soit $(\vec{u}_2)$ une base de la direction de Δ (fig. 7).

plan sécant Π en M tout plan de $\mathcal{E}_3$ dont un point est M, ne contenant pas T; soit $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$ une base de la direction de Π.

Nous disposons ainsi du repère

$(M, \vec{v}_p, \vec{u}_2)$ de $\mathcal{E}_2$ dans lequel Δ a pour équation $\xi = 0$

$(M, \vec{v}_p, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de $\mathcal{E}_3$ dans lequel Π a pour équation $\xi = 0$

En utilisant : $\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{p!}\omega^p\left(\vec{v}_p + \vec{\varepsilon}(\omega)\right), \qquad \lim_{\omega\to 0}\vec{\varepsilon}(\omega) = \vec{0},$

on constate que le point générique $M_1(u+\omega)$ de Γ a, dans le repère considéré ci-dessus, une abscisse de la forme

$$\xi(\omega) = \frac{1}{p!}\omega^p(1+\varepsilon_1(\omega)),$$
$$\lim_{\omega\to 0}\varepsilon_1(\omega) = 0.$$

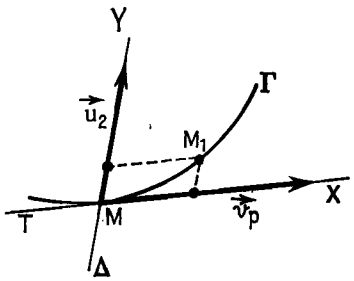


FIG. 7.

Nous en déduisons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout ω vérifiant

$$0 < |\omega| < \alpha,$$

on a : $\xi(\omega) \neq 0$ et $\operatorname{sgn}\xi(\omega) = \operatorname{sgn}\omega^p$.

Il en résulte que, $\overrightarrow{MV_p}$ désignant le représentant d'origine M de $\vec{v}_p$, pour $0 < |\omega| < \alpha$, $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{MV_p}$ sont du même côté ou de part et d'autre

de Δ | de Π

selon que $\omega^p > 0$ ou que $\omega^p < 0$.

La figure 8 indique, dans le cas de $\mathcal{E}_3$, la position par rapport à Π des images Γ' et Γ'' des restrictions de $\vec{F}$ à $[u, u+\alpha]$ et $[u-\alpha, u]$. Retenons que, selon que p est impair (ce qui est le cas pour un point ordinaire) ou que p est

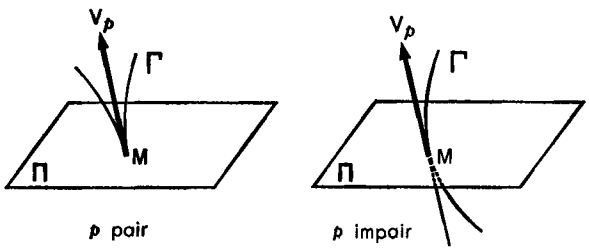


FIG. 8.

pair, les deux arcs de Γ qui aboutissent en M sont d'un même côté ou de part et d'autre

de toute sécante en M | de tout plan sécant en M.

Quand p est impair, on dit que la courbe traverse en M

toute sécante | tout plan sécant.

Quand p est pair, on dit que M est un *point de rebroussement* de Γ.

2° **Demi-tangentes en M.** — Nous ajoutons ici l'hypothèse : l'arc géométrique $\mathcal{A}$ est orienté (II, 287, 6°). Les vecteurs dérivés au point M qui correspondent aux représentations paramétriques admissibles constituant la classe $\mathcal{A}_+$ ont le même sens, ainsi que cela résulte du calcul du n° 13, 2°. Il en

résulte que tous ces vecteurs dirigent une même demi-droite qui sera dite demi-tangente positive en M à Γ.

III. ÉTUDE LOCALE D'UNE COURBE PLANE PAR RAPPORT A LA TANGENTE EN UN POINT

Dans le sous-chapitre précédent, nous avons étudié les généralités sur les tangentes, sécantes et plans sécants, à la fois dans le plan et dans l'espace. Nous allons maintenant nous borner à étudier la disposition d'une courbe plane par rapport à la tangente en un point; l'étude d'une courbe gauche par rapport à un plan tangent en un point sera faite au chapitre IV.

La lecture de ce sous-chapitre pourra être laissée de côté provisoirement par un élève de première année; elle n'est pas indispensable pour la construction d'un certain nombre de courbes planes, construction étudiée au chapitre III.

16. *Position par rapport à la tangente en* M *des arcs qui aboutissent en* M. — 1° **Point ordinaire.** — Supposons, ce qui est le cas général,

$$\vec{v}_1 \neq \vec{0}, \qquad \vec{v}_2 \neq \vec{0}, \qquad \vec{v}_1 \text{ et } \vec{v}_2 \text{ non colinéaires.}$$

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ peuvent servir de base pour l'espace vectoriel des vecteurs libres du plan. On dit alors que M est un point ordinaire de Γ.

La formule de Taylor vectorielle donne

$$(1) \qquad \overrightarrow{MM_1} = \omega\vec{v}_1 + \frac{\omega^2}{2}\left(\vec{v}_2 + \vec{\varepsilon}\right) \qquad \lim_{\omega \to 0} \vec{\varepsilon} = \vec{0}.$$

On peut en déduire une expression des coordonnées de M_1 dans le repère $\left(M, \vec{v}_1, \vec{v}_2\right)$. Il existe deux fonctions réelles $\varepsilon_1(\omega)$ et $\varepsilon_2(\omega)$ telles que

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_1\vec{v}_1 + \varepsilon_2\vec{v}_2;$$

ε_1 et ε_2 ont pour limite 0 lorsque ω tend vers 0.

Alors la formule (1) donne

$$(2) \qquad \overrightarrow{MM_1} = \xi\vec{v}_1 + \eta\vec{v}_2 \qquad \begin{cases} \xi = \omega + \varepsilon_1\dfrac{\omega^2}{2} & \lim\limits_{\omega \to 0} \varepsilon_1 = 0 \\ \eta = \dfrac{\omega^2}{2} + \varepsilon_2\dfrac{\omega^2}{2} & \lim\limits_{\omega \to 0} \varepsilon_2 = 0 \end{cases}$$

En d'autres termes,

$$\text{lorsque } \omega \text{ tend vers } 0 \qquad \begin{cases} \xi \sim \omega \\ \eta \sim \dfrac{\omega^2}{2}. \end{cases}$$

Or nous savons (II, n° 48, 2°) que si deux fonctions f et φ sont équivalentes lorsque ω tend vers 0, il existe un voisinage de 0 sur lequel, pour $\omega \neq 0$, les

nombres $f(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ sont distincts de 0 et ont le même signe. Il en résulte qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$0 < |\omega| < \alpha \implies \begin{cases} \operatorname{sgn}\xi = \operatorname{sgn}\omega \\ \eta > 0. \end{cases}$$

La forme de la courbe Γ (fig. 9) au voisinage de M en résulte.

En résumé

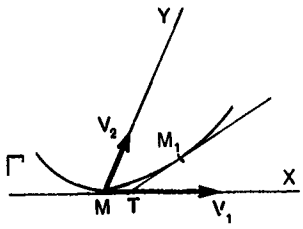


FIG. 9.

THÉORÈME. — **Les deux arcs qui aboutissent en un point ordinaire M d'une courbe plane Γ sont, par rapport à la tangente en M, du même côté que le vecteur**

$$\overrightarrow{MV_2} = \frac{d^2\vec{M}}{du^2}.$$

On énonce encore ce résultat en disant que **le vecteur $\overrightarrow{MV_2}$ est dirigé vers la concavité de la courbe Γ en M.**

2° **Cas particuliers.** — En un point M ordinaire, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont des vecteurs indépendants.

Si pour un point M les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas indépendants, M n'est pas un point ordinaire; ce sera le cas :

a) soit lorsque $\vec{v}_1$ étant distinct de $\vec{0}$, $\vec{v}_2$ est $\vec{0}$ ou est colinéaire à $\vec{v}_1$;

b) soit lorsque $\vec{v}_1 = \vec{0}$.

La méthode utilisée au 1° reste valable s'il existe au point M deux vecteurs dérivées du vecteur-espace $\overrightarrow{OM}$ qui forment une base de l'espace vectoriel des vecteurs libres de $\mathcal{E}_2$, ce qui permet, en associant à ces vecteurs l'origine M, d'obtenir un repère de $\mathcal{E}_2$ dans lequel nous exprimerons les coordonnées du point générique M_1 de Γ.

Soit $\vec{v}_p$ la première des dérivées successives du vecteur-espace $\overrightarrow{OM}$ qui soit distincte de $\vec{0}$ ($p \geqslant 1$) et soit $\vec{v}_q$ la première des dérivées d'ordre supérieur à p qui ne soit ni nulle, ni colinéaire à $\vec{v}_p$.

Pour $k = p + 1, p + 2, \ldots, q - 1$, il existe des scalaires réels, éventuellement nuls, a_k, tels que $\vec{v}_k = a_k \vec{v}_p$.

La formule de Taylor vectorielle s'écrit alors

$$(3)\quad \overrightarrow{MM_1} = \left(\frac{\omega^p}{p!} + \frac{\omega^{p+1}}{(p+1)!}a_{p+1} + \cdots + \frac{\omega^{q-1}}{(q-1)!}a_{q-1}\right)\vec{v}_p + \frac{\omega^q}{q!}\left(\vec{v}_q + \vec{\varepsilon}_q\right) \qquad \lim_{\omega \to 0} \vec{\varepsilon}_q = \vec{0}.$$

Il existe deux fonctions réelles $\varepsilon(\omega)$ et $\varepsilon'(\omega)$ telles que

$$\vec{\varepsilon_q} = \varepsilon \vec{v_p} + \varepsilon' \vec{v_q}$$

ε et ε' ont pour limite 0 lorsque ω tend vers 0.

Alors la formule (3) donne

$$(4) \quad \overrightarrow{MM_1} = \xi \vec{v_p} + \eta \vec{v_q} \qquad \begin{cases} \xi \sim \dfrac{\omega^p}{p!} \\ \eta \sim \dfrac{\omega^q}{q!} \end{cases} \quad \text{lorsque } \omega \text{ tend vers 0.} \quad (q > p).$$

D'après le n° 48, 2° du tome II (cf. n° 16, 1°), il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$0 < |\omega| < \alpha \implies \begin{cases} \operatorname{sgn} \xi = \operatorname{sgn} \omega^p \\ \operatorname{sgn} \eta = \operatorname{sgn} \omega^q. \end{cases}$$

Pour $\omega > 0$, le point M_1 de Γ est situé dans l'angle saillant I des vecteurs $\overrightarrow{MV_p}$ et $\overrightarrow{MV_q}$ (fig. 10); il suffit de regarder, pour $\omega < 0$, si M_1 est dans l'un des angles I, II, III, IV.

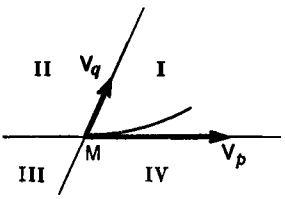


FIG. 10.

Suivant que p et q sont pairs ou impairs, on aura l'une des quatre dispositions suivantes :

I. p EST IMPAIR; on sait que *la courbe* Γ *traverse toute sécante passant par* M (fig. 11).

a) Si q est pair, les deux arcs qui aboutissent en M sont d'un même côté de la tangente, celui où se trouve le vecteur $\overrightarrow{MV_q} = \vec{v_q}$; la forme est analogue à celle du point ordinaire ($p = 1$, $q = 2$).

b) Si q est impair, les deux arcs qui aboutissent en M sont de part et d'autre de la tangente. *La courbe* Γ *traverse alors en* M *toute droite passant par* M, *même la tangente.* On dit alors que le point M est un *point d'inflexion géométrique.*

Dans la pratique, ce cas se rencontre pour $p = 1$, $q = 3$.

II. p EST PAIR; on sait que *la courbe* Γ *ne traverse en* M *aucune des sécantes passant par* M (fig. 11).

a) Si q est impair, les deux arcs qui aboutissent en M sont de part et d'autre de la tangente; *la tangente est la seule droite que la courbe traverse en* M. On dit que le point M est *un point de rebroussement de première espèce.* Ce cas se rencontre le plus souvent pour $p = 2$, $q = 3$.

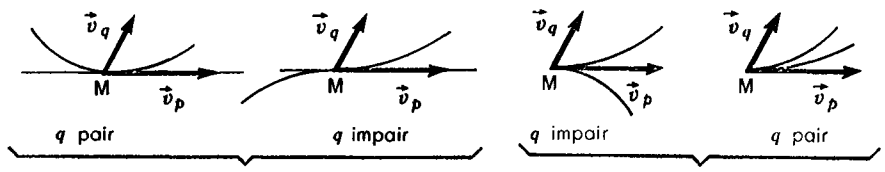


FIG. 11.

b) *Si q est pair*, les deux arcs qui aboutissent en M sont du même côté de la tangente; la courbe ne traverse en M aucune des droites qui passent par M. On dit que le point M est *un point de rebroussement de seconde espèce.*

Ce cas se rencontre ordinairement pour $p = 2$, $q = 4$.

REMARQUE. — Dans le repère $(M, \vec{v_p}, \vec{v_q})$, la seconde coordonnée est un infiniment petit d'ordre $\frac{q}{p}$ par rapport à la première; plus q est grand, pour p fixé, plus la courbe « traîne » sur la tangente au voisinage de M.

Dans le cas où $p = 1$, et où q est pair, au moins égal à 4, on dit que M est un point *méplat* : si l'allure globale de la courbe est celle d'un point ordinaire ($p = 1$, $q = 2$) la courbe est néanmoins beaucoup plus rapprochée de la tangente, de part et d'autre de M.

APPLICATION. — Désignons par X et Y les coordonnées du point générique du plan rapporté au repère $(M, \vec{v_p}, \vec{v_q})$. L'équation de la tangente à Γ en M_1, qui est en général un point ordinaire, s'écrit

$$\eta' X - \xi' Y + \eta\xi' - \xi\eta' = 0.$$

$$\eta' \sim \frac{\omega^{q-1}}{(q-1)!}; \qquad \xi' \sim \frac{\omega^{p-1}}{(p-1)!}; \qquad \eta\xi' - \xi\eta' \sim \frac{p-q}{p!q!}\omega^{p+q-1}.$$

On en déduit, en désignant par μ le coefficient directeur de cette tangente, et par X_T l'abscisse de son point d'intersection avec la tangente en M

$$\mu \sim \frac{(p-1)!}{(q-1)!}\omega^{q-p}, \qquad X_T \sim \frac{q-p}{q.p!}\omega^p.$$

Il s'agit donc d'infiniment petits avec ω, et nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *En tout point* M *de* Γ *en lequel existent deux dérivées successives du vecteur-espace qui forment un système libre* :

a) *la tangente en* M *est la limite de la tangente en* M_1, *quand* M_1 *tend vers* M;

b) *le point* M *est la limite, quand* M_1 *tend vers* M, *du point d'intersection des tangentes en* M *et* M_1.

REMARQUE. — L'existence de dérivées successives de tous ordres du vecteur-espace au point M n'est pas suffisante pour que la proposition précédente soit vraie (cf. exercice page 43).

17. ***Points d'inflexion.*** — 1° On cherche les points d'inflexion géométrique de la courbe Γ

a) parmi les points non stationnaires où $\frac{d^2\vec{M}}{du^2}$ est nul ou colinéaire à $\frac{d\vec{M}}{du}$;

b) exceptionnellement, parmi les points stationnaires s'il en existe.

La première condition conduit à chercher les valeurs de u telles que

$$x'y'' - y'x'' = 0, \quad x', y' \text{ non nuls simultanément.}$$

Par analogie avec ce qui a été déjà vu (II, n° 123) pour les courbes $y = f(x)$, *nous appellerons point d'inflexion analytique de* Γ *tout point non stationnaire tel que*

$$x'y'' - y'x'' = 0.$$

Avec les notations du n° 16, ce sont les points pour lesquels $p = 1$, $q \geqslant 3$.

2° Les points d'inflexion apparaissent quand on suit la variation de la direction de la tangente en M à Γ.

Le coefficient directeur de la tangente est

$$m = \frac{y'}{x'} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dm}{du} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2}.$$

En un point d'inflexion analytique où la tangente n'est pas parallèle à Oy, $\dfrac{dm}{du}$ est nul, et inversement.

En disant qu'une fonction de u est stationnaire quand sa dérivée est nulle, et qu'une direction est stationnaire quand son coefficient directeur est stationnaire, on peut énoncer : *les points d'inflexion analytique de* Γ *sont les points où la direction de la tangente est stationnaire.*

3° On peut préciser le résultat précédent en étudiant l'ensemble Λ des points μ tels que $\mu = O + \vec{F}'(u)$ (notations du n° 13).

Soit pour la valeur u du paramètre $\overrightarrow{OL} = \vec{v}_1$; $\dfrac{\overrightarrow{dL}}{du} = \vec{v}_2$.

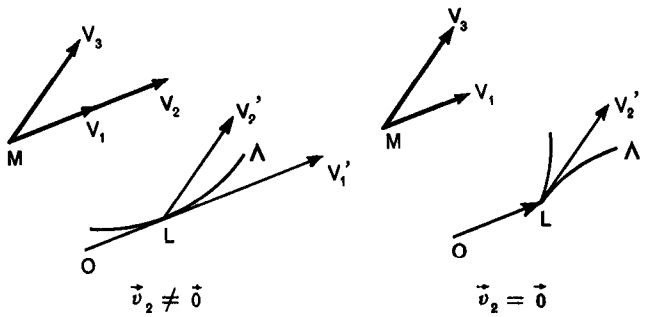


FIG. 12.

Si $\vec{v}_2 \neq 0$ est colinéaire à $\vec{v}_1$, $\overrightarrow{LV_1'} = \vec{v}_2$ dirige la tangente en L à Λ;

Si $\vec{v}_2 = \vec{0}$, L est un point de rebroussement pour Λ.

Dans les deux cas, les deux arcs de Λ qui aboutissent à L sont du côté de la droite OL où se trouve le vecteur $\overrightarrow{LV_2'} = \vec{v}_3$, en supposant que $\vec{v}_3$ soit un vecteur

indépendant de $\vec{v_1}$, de façon que M soit un point d'inflexion géométrique de Γ; dans les deux cas, le coefficient directeur de la tangente passe par un extremum.

Le résultat est le même dans tous les cas où le vecteur $\vec{v_q}$ du n° 16 correspond à q impair. En résumé :

Lorsqu'une courbe Γ présente une inflexion géométrique en un point M non stationnaire, le coefficient directeur de la tangente au point générique de Γ présente un extremum quand ce point générique passe par M.

REMARQUE I. — En un point mépiat, le coefficient directeur de la tangente est stationnaire, mais ne présente pas d'extremum.

REMARQUE II. — Dans un repère unitaire orthogonal, on pourra étudier l'angle polaire φ de la tangente :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y'}{x'}; \qquad \frac{d\varphi}{du} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2}$$

et aboutir aux mêmes conclusions.

EXEMPLE. — Voir le n° 28, ex. III.

18. ***Points stationnaires.*** — 1° Les points stationnaires d'une courbe Γ apparaissent d'eux-mêmes quand on suit les variations des coordonnées x et y du point générique de Γ. Si les dérivées de x et y s'annulent pour une même valeur u du paramètre, le point $M(u)$ est stationnaire.

Une étude spéciale est nécessaire pour trouver la tangente puisque l'expression $m = \frac{y'}{x'}$ qui donne le coefficient directeur de la tangente se présente sous forme indéterminée $\frac{0}{0}$. D'après la règle de l'Hôpital (II, n° 78, 3°) si $f''(u)$ et $g''(u)$ sont différents de 0, m a même limite que $\frac{g''(u_1)}{f''(u_1)}$ lorsque u_1 tend vers u.

Or nous avons vu que le vecteur $\frac{d^2\vec{M}}{du^2}$, s'il était distinct de $\vec{0}$, dirigeait la tangente en un point stationnaire. On retrouve que la limite d'une tangente est une tangente (II, n° 77, 3°).

Pratiquement, si on peut simplifier l'expression de m, on cherchera la limite de m quand le paramètre tend vers u.

L'étude du signe de la puissance analytique de $M_1(u_1)$ par rapport à la tangente en M permet d'obtenir le dessin des arcs de Γ qui aboutissent en M, sans qu'il soit nécessaire d'utiliser l'étude du n° 16. (voir l'exercice III du n° 28).

2° On peut distinguer les deux espèces de rebroussement en suivant la variation de la direction de la tangente, c'est-à-dire en étudiant la courbe Λ du n° 17, 3°.

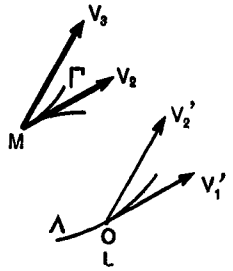


FIG. 13.

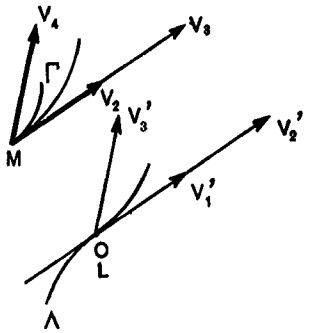


FIG. 14.

En supposant $\vec{v_1} = \vec{0}$, $\vec{v_2} \neq \vec{0}$, le point correspondant L de Λ coïncide avec O, et la tangente en L à Λ est dirigée par

$$\frac{d\vec{L}}{du} = \vec{v_2} = \overrightarrow{LV_1'}.$$

Si $\vec{v_3}$ n'est pas colinéaire à $\vec{v_2}$, la courbe Λ présente en O un point ordinaire, et la figure 13 montre que *le coefficient directeur de la tangente continue à varier dans le même sens quand le point générique de Γ traverse un point de rebroussement de première espèce.*

Si $\vec{v_3}$ est colinéaire à $\vec{v_2}$, et si $\vec{v_4}$ est indépendant de $\vec{v_2}$, la courbe Λ présente en O une inflexion géométrique; la figure 14 montre que *le coefficient directeur de la tangente présente un extremum quand le point générique de Γ traverse un point de rebroussement de seconde espèce.*

Les résultats sont analogues dans les cas exceptionnels étudiés au n° 16, 2e partie, suivant que, p étant pair, q est impair ou pair.

IV. BRANCHES INFINIES ET ASYMPTOTES

19. *Branches infinies des courbes planes ou gauches.* — 1° **Branche infinie.** — Soit M un point décrivant une courbe Γ, plane ou gauche, définie dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par une représentation paramétrique :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u).$$

Si lorsque u tendant vers u_0, $\|\vec{F}(u)\|$ tend vers l'infini, on dit que M s'éloigne à l'infini sur Γ, ou encore qu'il décrit une *branche infinie* de Γ.

Si O′ est un point fixe de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ devient aussi infini car (n° 1, 3°).

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} \quad \Longrightarrow \quad \|\overrightarrow{O'M}\| \geqslant \|\overrightarrow{OM}\| - \|\overrightarrow{OO'}\|$$

2° **Direction asymptotique.** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Si, un point M s'éloignant à l'infini sur une branche de courbe plane ou gauche, la droite qui joint ce point à un point fixe O tend vers une position limite OΔ, la**

droite qui joint M à un autre point fixe O′ tend vers une position limite O′Δ′ de même direction que OΔ. Cette direction, indépendante du point fixe choisi, est ce qu'on appelle la direction asymptotique de la branche infinie.

Soit $\vec{V}$ un vecteur porté par OM et ayant pour limite un vecteur $\vec{L} \neq \vec{0}$ porté par OΔ :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{V}, \quad r \in \mathrm{R}.$$
$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = |r|.\left\|\vec{V}\right\|$$

ne peut devenir infini que si r devient infini, puisque $\left\|\vec{V}\right\|$ est borné.

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = r\left[\frac{\overrightarrow{O'O}}{r} + \vec{V}\right]$$

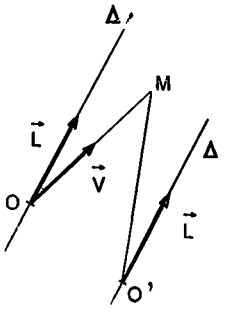


FIG. 15.

Or le vecteur $\vec{V'} = \dfrac{\overrightarrow{O'O}}{r} + \vec{V}$ a pour limite le vecteur $\vec{L}$; il en résulte que la droite O′M, support de $\vec{V'}$, a pour limite la droite O′Δ′ parallèle à OΔ.

REMARQUE. — L'espace affine $\mathcal{E}_2$ (resp. $\mathcal{E}_3$) étant complété par *la droite à l'infini* (resp. *le plan à l'infini*) on peut dire que le point M, commun aux droites OM et O′M a pour position limite le point à l'infini dans la direction Δ. Si une courbe Γ admet Δ pour direction asymptotique, on convient de dire qu'elle contient le point à l'infini dans la direction Δ.

3° **Asymptote.** — DÉFINITION. — **Une droite A est dite asymptote à la courbe Γ si la parallèle Mδ à A menée par un point M de Γ admet A pour position limite lorsque M s'éloigne indéfiniment** (1).

On dit aussi que Γ est asymptote à A.

THÉORÈME. — **Si la courbe Γ est asymptote à A, elle admet la direction de A pour direction asymptotique.**

Soit M le point générique de Γ; le plan mené par M parallèlement à une direction de plan fixe Π coupe A en H; par hypothèse $\left\|\overrightarrow{HM}\right\|$ a pour limite 0 lorsque M s'éloigne à l'infini.

Prenons un point fixe O sur A, un vecteur fixe $\overrightarrow{OK}$ sur A :

(1) Nous adoptons pour distance des deux droites Δ et Δ′ de $\mathcal{E}_3$ parallèles à la droite donnée A la distance des points d'intersection de Δ et Δ′ avec un plan fixe Π, non parallèle à A. Le lecteur vérifiera que la topologie de l'ensemble des droites parallèles à A ainsi obtenue est indépendante du choix de Π.

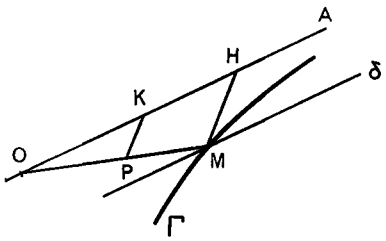


Fig. 16.

$$\|\overrightarrow{OH}\| > \|\overrightarrow{OM}\| - \|\overrightarrow{HM}\|$$

par suite H s'éloigne à l'infini en même temps que M.

Le plan mené par K parallèlement à la direction de plan Π coupe OM en P; les figures OKP, OHM sont homothétiques :

$$\overrightarrow{OH} = r\overrightarrow{OK}, \qquad \overrightarrow{HM} = r\overrightarrow{KP};$$

le scalaire r devient infini, et par suite le vecteur $\overrightarrow{KP} = \dfrac{\overrightarrow{HM}}{r}$ tend vers $\vec{0}$: la direction OM a pour limite la direction de OK; c'est dire, d'après le 2°, que la direction de A est une direction asymptotique de la courbe Γ.

Remarque. — Soit α le point à l'infini sur l'asymptote A, nous devons regarder α comme un point de la branche de courbe. La parallèle à A menée par M n'est autre que la droite Mα. La droite A, position limite de Mα quand M tend vers α en restant sur la courbe, doit être regardée comme la tangente en α. Cette considération nous conduit à regarder une asymptote comme une tangente en un point à l'infini.

4° **Recherche d'une asymptote.** — L'étude du 3° montre que la branche infinie Γ ne peut admettre une asymptote que si elle admet une direction asymptotique.

a) si Γ n'admet pas de direction asymptotique, Γ n'admet pas d'asymptote.

b) *si* Γ *admet une direction asymptotique* Δ, pour reconnaître l'existence éventuelle d'une asymptote, *on mène par le point générique* M *de* Γ *la parallèle* Mδ *à* Δ :

α) *Si* Mδ *tend vers une position limite* A, A *est une asymptote de* Γ;

β) Si Mδ n'a pas de position limite, Γ n'a pas d'asymptote; mais si Mδ *s'éloigne indéfiniment, on dit que la branche infinie est parabolique* (nous verrons au n° **24**, que cette dénomination est empruntée à l'exemple de la parabole, qui se trouve précisément dans ce cas).

Remarque. — Comme on l'a vu à la fin du 3°, le point à l'infini α dans la direction asymptotique Δ doit être regardée comme un point de Γ; dire que la droite Mδ (ou Mα) s'éloigne indéfiniment lorsque M tend vers α en décrivant Γ revient à dire que Γ est tangente en α à la droite à l'infini du plan ou au plan à l'infini de l'espace.

V. NOTIONS SUR LES COURBES REPRÉSENTÉES PARAMÉTRIQUEMENT EN COORDONNÉES HOMOGÈNES

Nous supposons toujours que nous sommes placés dans un espace affine non euclidien, complété par un *plan de l'infini*. Nous utilisons ici des coordonnées homogènes.

20. ***Limite d'un point, en coordonnées homogènes.*** — 1° Supposons que les quatre coordonnées homogènes x, y, z, t d'un point M soient des fonctions de la variable réelle u, définies sur le segment $[a, b]$. Nous les grouperons dans la matrice

$$\mathfrak{M}(u) = \begin{bmatrix} f(u) \\ g(u) \\ h(u) \\ \theta(u) \end{bmatrix}$$

$\mathfrak{M}$ est définie à un facteur près de proportionnalité, $\lambda \neq 0$; λ peut être une fonction de u.

A toute valeur $u \in [a, b]$ telle que la matrice $\mathfrak{M}$ soit distincte de la matrice nulle (0), correspond un point M, à distance finie si $\theta(u) \neq 0$, à l'infini si $\theta(u) = 0$.

2° Si, lorsque u tend vers u_0, $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, $\theta(u)$ ont des limites α, β, γ, τ, on dit que $\mathfrak{M}(u)$ a pour limite la matrice

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \tau \end{bmatrix}$$

3° *On dit que le point* M *a pour limite le point* A *si* ***un système de coordonnées homogènes de*** M *a pour limite* ***un système de coordonnées homogènes de*** A.

Tout système de coordonnées homogènes de M n'a pas nécessairement de limite : il suffit de considérer la matrice $\lambda\mathfrak{M}$, $\lambda(u)$ n'ayant pas de limite, ou ayant pour limite zéro, lorsque u tend vers u_0.

Les systèmes de coordonnées homogènes de M qui ont des limites fournissent le même point limite A, car si $\mathfrak{M}$ a pour limite $\mathfrak{A}$, $\lambda\mathfrak{M}$ ne peut avoir de limite que si λ en a une, soit λ_0, et $\lambda_0\mathfrak{A}$ définit le même point que $\mathfrak{A}$.

4° Supposons que $\theta(u)$ tende vers 0; la droite OM, qui a pour paramètres directeurs $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ a pour position limite la droite OΔ, de paramètres directeurs α, β, γ, en même temps que M s'éloigne indéfiniment; OΔ est une direction asymptotique de la courbe Γ; le point A est le point à l'infini sur OΔ.

21. ***Tangente en coordonnées homogènes.*** — 1° Soit M(u) un point fixe de Γ, M$_1(u_1)$ un point variable; ils sont associés aux matrices $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_1$; la matrice

$$\frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}}{u_1 - u}$$

définit un point de la droite MM$_1$; or cette matrice a pour limite la matrice

$$\mathfrak{M}' = \begin{bmatrix} f'(u) \\ g'(u) \\ h'(u) \\ \theta'(u) \end{bmatrix} \qquad \text{Posons } [\mathfrak{M}\mathfrak{M}'] = \begin{bmatrix} f(u) & f'(u) \\ g(u) & g'(u) \\ h(u) & h'(u) \\ \theta(u) & \theta'(u) \end{bmatrix}$$

Si la matrice $[\mathcal{M}_0\mathcal{M}_0']$ est de rang 2, c'est-à-dire si $\mathcal{M}_0' \neq (0)$ et si f', g', h', θ' ne sont pas proportionnels à f, g, h, θ, $\mathcal{M}_0'$ définit un point M' distinct de M; si M est à distance finie, la droite MM_1 a alors une position limite; *il existe en* M *une tangente déterminée par* M *et le point* M', appelé *point dérivé* de M.

Il existe une infinité de points dérivés, car si on remplace $\mathcal{M}_0$ par $\lambda.\mathcal{M}_0$, λ étant dérivable, $\mathcal{M}_0'$ est remplacé par $\lambda'.\mathcal{M}_0 + \lambda.\mathcal{M}_0'$; le nouveau point associé est situé sur la droite MM' : tous les points dérivés sont situés sur la tangente en M.

Si M est à l'infini, M' à distance finie, nous serons amenés à dire que MM' est une asymptote de Γ.

Si M et M' sont tous deux à l'infini, dans les directions Δ et Δ', la tangente en M est la droite à l'infini dans la direction de plan déterminée par Δ et Δ' : nous dirons que Γ admet une branche parabolique, avec une tangente rejetée à l'infini dans la direction de plan (Δ, Δ').

2° **Équation homogène de la tangente à une courbe plane.** — Il suffit, dans le cas particulier d'une courbe plane, de supposer $h(u) = 0$, quel que soit $u \in [a, b]$.

En exprimant que le point générique de la tangente est aligné avec M et M', on obtient

$$\begin{vmatrix} x & f(u) & f'(u) \\ y & g(u) & g'(u) \\ t & \theta(u) & \theta'(u) \end{vmatrix} = 0.$$

3° **Point stationnaire.** — On dit que le point M est stationnaire lorsque la matrice $[\mathcal{M}_0\mathcal{M}_0']$ est de rang 1 :

ou bien M' n'existe pas : f', g', h', θ' sont nuls;

ou bien M' est confondu avec M : f', g', h', θ' sont proportionnels à f, g, h, θ.

Si M est à distance finie, on retrouve la nullité des dérivées des coordonnées cartésiennes.

En écrivant

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} f(u+\omega) \\ g(u+\omega) \\ h(u+\omega) \\ \theta(u+\omega) \end{bmatrix} = \mathcal{M}_0 + \omega.\mathcal{M}_0' + \ldots + \frac{\omega^p}{p!}[\mathcal{M}_0^{(p)} + \mathrm{E}], \quad \mathrm{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{\omega \to 0} \mathrm{E} = (0)$$

on montre que la tangente en un point stationnaire est définie par M et par le point associé à la matrice $\mathcal{M}_0^{(p)}$, p étant le plus petit des entiers (dont on suppose l'existence) tels que la matrice $[\mathcal{M}_0\mathcal{M}_0^{(p)}]$ soit de rang 2.

EXERCICE

*On donne la courbe Γ décrite par le point M : $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u)$, la fonction $\vec{F}$ admettant en tout point des dérivées successives $\vec{v}_k$ de tout ordre. Nous nous proposons de vérifier sur des contre-exemples, que les résultats sur l'existence et la continuité de la tangente, obtenus aux n°s **15** et **16** dans le cas d'un point M en lequel les vecteurs $\vec{v}_k$ ne sont pas tous nuls, ne s'étendent pas nécessairement au cas d'un point M en lequel les vecteurs $\vec{v}_k$ sont tous nuls.

1° Soit φ la fonction réelle de la variable réelle u, définie par

$$\varphi(u) = e^{-\frac{1}{u^2}} \quad \text{si } u \neq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0.$$

Montrer que φ est continue sur R et qu'elle admet des dérivées successives continues, à tous les ordres (on étudiera successivement $u \neq 0$ et $u = 0$).

Quel est le rayon de convergence de la série de Mac Laurin (tome II, n° 217) de la fonction φ? φ est-elle développable en série entière?

2° Reprendre le 1° en remplaçant $\varphi(u)$ successivement par $\psi_1(u) = u\,\varphi(u)$;

$$\psi_2(u) = \sin\frac{1}{u}\,\varphi(u) \qquad \text{si } u \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \psi_2(0) = 0; \qquad \psi_3(u) = u\,\psi_2(u).$$

3° On désigne par $\Gamma_i (i = 1, 2, 3)$ les trois courbes représentées par

$$x = \varphi(u), \qquad y = \psi_i(u).$$

Dire, pour chacune de ces courbes, si elle admet une tangente au point O et, en cas de réponse affirmative, si les propriétés de continuité énoncées au n° 16 restent vrales.

CHAPITRE III

COURBES PLANES DÉTERMINÉES PAR UNE REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE

I. GÉNÉRALITÉS

22. *Tracé d'une courbe plane.* — 1° **Position du problème.** — On donne, relativement à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ une courbe plane Γ par une représentation paramétrique

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u) \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} x = f(u) \\ y = g(u), \end{cases}$$

f et g étant des fonctions réelles d'une variable réelle.

L'une des coordonnées de M, x par exemple, peut être le paramètre : on donne alors $y = f(x)$.

Nous étudierons dans ce chapitre les techniques qui permettent d'obtenir un tracé d'ensemble de la courbe Γ.

2° **Marche à suivre.** — *a*) On cherche d'abord le champ réel $\mathcal{C}$ sur lequel est définie $\vec{F}(u)$: $\mathcal{C}$ est l'intersection des champs sur lesquels les fonctions f et g sont définies, ou tout au moins la partie I de $\mathcal{C}$ qui sera précisée au n° 23.

Si cette étude est possible ou facile, on étudie les variations de f et de g sur $\mathcal{C}$ (ou sur I); les résultats sont matérialisés dans un tableau au fur et à mesure qu'ils sont obtenus; ce tableau n'est pas seulement un mode de présentation des résultats, c'est surtout un instrument de travail permettant leur confrontation. Ces résultats sont en outre portés sur une figure provisoire au fur et à mesure qu'ils sont consignés dans le tableau.

On n'oubliera pas que le problème posé par la construction de Γ n'est pas identique à celui de la variation simultanée de deux fonctions : bien souvent des renseignements de nature géométrique, comme nous allons le voir, permettent d'avoir une ébauche de la courbe.

b) On étudie, s'il y a lieu, les branches infinies de Γ.

c) L'exploitation des résultats obtenus en *a*) et en *b*) permet en général le tracé d'une première ébauche de la courbe, surtout si on a prls soln de commencer déjà un croquis provisoire.

Cette ébauche sera perfectionnée progresslvement; on pourra y marquer les points où Γ rencontre les axes.

d) Si l'ébauche précédente montre la présence de points doubles, on cherchera leurs coordonnées.

e) On pourra préciser l'ébauche en étudiant localement Γ au voisinage de points remarquables, en étudiant la concavité, etc.

On n'hésitera pas à déterminer de nombreux points partlculiers dans une région où le tracé semble douteux ou pour un intervalle où le tracé présente un intérêt pratique, comme c'est souvent le cas dans les sciences expérlmentales.

23. ***Réduction de l'intervalle d'étude des fonctions*** f et g. — 1° **Cas particulier.** — Pour la courbe Γ donnée par $y = f(x)$, tout a été dit au n° 131 du tome II.

2° **Cas général.** — *a*) Supposons que f et g aient une période commune positive P, plus petlte que toutes les autres périodes communes positives :

$$\forall u, \quad f(u + \mathrm{P}) = f(u) \qquad \text{et} \qquad g(u + \mathrm{P}) = g(u);$$

il suffira de faire varier u dans un intervalle quelconque d'amplitude P, soit $[\alpha, \alpha + \mathrm{P}[$, $\forall \alpha$, pour obtenir toute la courbe.

Le choix de α résultera souvent des considératlons de symétrie qui vont être exposées.

b) On pourra réduire l'intervalle de variation utile chaque fois qu'il existera une relation symétrique entre u et u', soit $\varphi(u, u') = 0$, telle que sl u et u' vérifient cette relation, les points $\mathrm{M}(u)$ et $\mathrm{M}'(u')$ soient homologues dans une symétrie $\mathcal{S}$ par rapport à un point ou par rapport à une droite.

Les cas usuels sont les suivants :

I. $u + u' = a$, a étant une constante;

on trace l'arc $\left[\frac{a}{2}, + \infty\right[$ et on complète par la symétrie $\mathcal{S}$.

Si on a trouvé la période commune P, comme en *a*), on choisit comme intervalle d'amplitude P celui qui a pour milieu $\frac{a}{2}$, soit $\left[\frac{a}{2} - \frac{\mathrm{P}}{2}, \frac{a}{2} + \frac{\mathrm{P}}{2}\right[$, et l'on commence par tracer Γ pour l'un des intervalles

$$\left[\frac{a}{2} - \frac{\mathrm{P}}{2}, \frac{a}{2}\right] \quad \text{et} \quad \left[\frac{a}{2}, \frac{a}{2} + \frac{\mathrm{P}}{2}\right];$$

on complète par la symétrie $\mathcal{S}$.

II. $uu' = 1$, ou $uu' = -1$; on commence par tracer l'arc de Γ correspondant à l'intervalle $[-1, +1]$; on complète par la symétrie $\mathcal{S}$.

Les symétries rencontrées le plus souvent sont les suivantes :
si $f(u') = f(u)$, $g(u') = -g(u)$, $x'x$ est axe de symétrie pour la direction $y'y$;
si $f(u') = -f(u)$, $g(u') = g(u)$, $y'y$ est axe de symétrie pour la direction $x'x$;
si $f(u') = -f(u)$, $g(u') = -g(u)$, O est centre de symétrie;
si $f(u') = g(u)$, $g(u') = f(u)$, la première diagonale du repère est axe de symétrie pour la direction de la seconde diagonale;
si $f(u') = -g(u)$, $g(u') = -f(u)$, la seconde diagonale du repère est axe de symétrie pour la direction de la première diagonale;
si $f(u') = 2d - f(u)$, $g(u') = g(u)$, la droite d'abscisse d est axe de symétrie pour la direction $x'x$.

c) Lorsqu'on aura pu réduire le champ $\mathcal{C}$ (n° 22) comme on vient de l'expliquer en *a*) et en *b*), on aura obtenu en général un intervalle I tel que, u parcourant I, M décrive un arc γ de Γ; une fois tracé γ, des symétries permettront d'en déduire Γ : on peut appeler γ *l'arc générateur* de Γ.

C'est seulement sur l'intervalle I qu'on étudiera la variation simultanée des fonctions f et g et les branches infinies (n° 22, 2°).

24. ***Construction des branches infinies.*** — Nous allons appliquer aux courbes planes représentées paramétriquement les généralités du n° 19.

Nous nous bornerons à étudier les branches infinies obtenues lorsque l'une au moins des coordonnées devient infinie.

1re partie. — Une seule des deux coordonnées du point M devient infinie. — *a*) **Lorsque, simultanément, y devient infini et x a pour limite a, la droite A d'abscisse a est asymptote à la courbe Γ.**

Supposons $\lim_{u \to \alpha} f(u) = a$; $\lim_{u \to \alpha} g(u) = \infty$ (Le nombre réel α est fini ou infini.)

La parallèle à Ox menée par M (x, y) rencontre la droite A en un point H, $\overline{HM} = x - a$ a pour limite 0, et la parallèle à A menée par M a pour position limite A lorsque M s'éloigne indéfiniment (fig. 17).

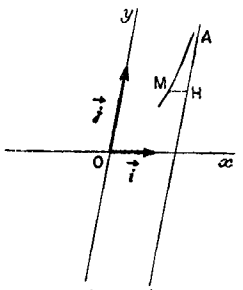


Fig. 17.

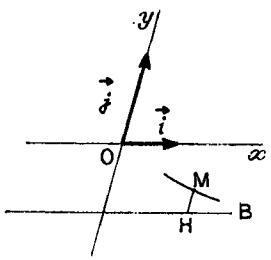


Fig. 18.

On étudie la position des branches infinies par rapport à A en confrontant, lorsque u tend vers α (à gauche et à droite, si α est fini) les signes de l'infiniment petit $x - a$ et de l'infiniment grand y.

b) **Lorsque, simultanément, x devient infini et y a pour limite b, la droite B d'ordonnée b est asymptote à la courbe Γ.**

Il suffit de transposer x et y dans l'étude faite en *a*) (fig. 18).

EXEMPLES. Voir n° 27, ex. I; n° 28, ex. I; n° 28, ex. V.

2e partie. — Les deux coordonnées du point M deviennent simultanément infinies. — Par hypothèse $\lim_{u \to \alpha} f(u) = \infty$; $\lim_{u \to \alpha} g(u) = \infty$.

La recherche d'une position limite éventuelle de OM est un problème équivalent à la recherche d'une limite éventuelle du rapport $\frac{y}{x}$, coefficient directeur de OM.

1° *Il existe une direction asymptotique qui est celle de l'un des axes.*

a) Si $\frac{y}{x}$ tend vers zéro, la direction Ox est asymptotique, mais la parallèle à Ox menée par M s'éloigne indéfiniment puisque son ordonnée y devient infinie. La branche infinie étudiée est parabolique.

C'est ce qui se passe pour la parabole représentée par l'équation $y^2 - 2px = 0$; l'ordonnée y égale $\pm\sqrt{2px}$, $\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{2p}{x}}$, ce qui tend vers zéro quand x devient infini.

b) Si $\frac{y}{x}$ devient infini, la direction Oy est asymptotique, mais la parallèle à Oy menée par M s'éloigne indéfiniment puisque son abscisse x devient infinie. La branche infinie étudiée est parabolique.

C'est ce qui arrive pour $y = x^m$ lorsque l'exposant m est plus grand que 1 puisque $\frac{y}{x} = x^{m-1}$; c'est aussi le cas pour $y = \operatorname{ch} x$ et $y = \operatorname{sh} x$, puisque le rapport $\frac{e^x}{x}$ devient infini quand x devient infini par valeurs positives.

2° *Il existe une direction asymptotique de coefficient directeur* $c \neq 0$.

a) C'est ce qui a lieu si, et seulement si,

$$\lim_{u \to \alpha} \left(\frac{y}{x}\right) = c \qquad (c \neq 0).$$

b) Cherchons s'il existe alors une asymptote : la parallèle à la direction asymptotique Δ menée par le point $M(x, y)$ de la courbe Γ a pour équation

(1) $\qquad Y - y = c(X - x).$

Elle rencontre l'axe Oy au point Q (fig. 19) dont l'ordonnée est $y - cx$. Chercher si la droite MQ admet une position limite, c'est chercher si $y - cx$ admet une limite lorsque u tend vers α.

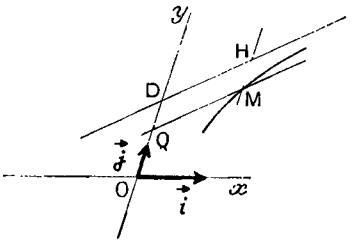


FIG. 19.

I. Si $y - cx$ devient infini, la branche infinie est parabolique.

II. Si $y - cx$ admet la limite d, Q admet pour position limite le point D d'ordonnée d, la droite MQ d'équation (1) a pour position limite la droite A représentée par l'équation

(2) $\qquad Y = cX + d.$

A est asymptote à la branche infinie décrite par M.

c) Position d'une branche infinie par rapport à son asymptote. — Soit H l'intersection de l'asymptote A trouvée plus haut et de la parallèle à $y'y$ menée par M, $\overline{HM}$ est l'excès de l'ordonnée y de M sur l'ordonnée de H qui, d'après l'équation de l'asymptote, est $cx + d$,

$$\overline{HM} = y - cx - d.$$

(On retrouverait cette expression en calculant $\overline{OQ} - \overline{OD}$.)

Pour placer la branche de courbe par rapport à son asymptote, on confronte, lorsque u tend vers α (à gauche et à droite si α est fini) le signe de l'un des infiniment grands x, y et le signe de l'infiniment petit $\overline{HM} = y - cx - d$.

Notons qu'il pourra être avantageux d'intervertir les rôles des axes Ox et Oy, et rappelons que si l'on a mis en évidence un arc générateur γ (23), il suffit de chercher les branches infinies de γ.

Résumons ces diverses règles :

Soit $M(u)$ le point générique de Γ, M s'éloignant à l'infini lorsque u tend vers α :

a) **si** $\lim_{u \to \alpha} \left(\frac{y}{x}\right) = c$, **$c$ est le coefficient directeur d'une direction asymptotique de Γ;**

b) **si** $\lim_{u \to \alpha} (y - cx) = d$, **la droite** $Y = cX + d$ **est asymptote à Γ;**

c) **pour placer les branches relatives à cette asymptote, on cherche si, dans un voisinage de α, $y - cx - d$ a un signe déterminé;** s'il en est ainsi la connaissance de ce signe donne la position des branches.

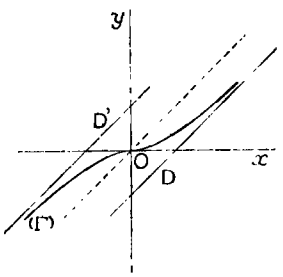


Fig. 20.

Exemple I. — Soit la courbe Γ d'équation (fig. 20)

$$y = x - \operatorname{th} x.$$

$$\frac{y}{x} = 1 - \frac{\operatorname{th} x}{x}; \qquad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{y}{x}\right) = 1;$$

la première bissectrice donne une direction asymptotique

$$y - x = -\operatorname{th} x; \qquad \lim_{x \to +\infty} (y - x) = -1.$$

Γ est asymptote à $D(Y = X - 1)$;

$y - x + 1 = 1 - \operatorname{th} x > 0$; Γ est au-dessus de D.

La symétrie de Γ par rapport à O permet d'obtenir l'autre asymptote D'.

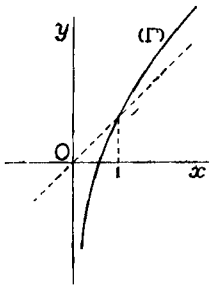


Fig. 21.

Exemple II. — Soit la courbe Γ d'équation (fig. 21)

$$y = x + \operatorname{Log} x.$$

$$\frac{y}{x} = 1 + \frac{\operatorname{Log} x}{x}; \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{y}{x}\right) = 1;$$

la première bissectrice donne une direction asymptotique

$$y - x = \operatorname{Log} x; \qquad \lim_{x \to +\infty} (y - x) = +\infty,$$

Γ admet une branche parabolique .

Autres exemples. — Voir les n^{os} **28, ex. II; 28, ex. III; 28, ex. IV.**

REMARQUES. — I. Il peut arriver que, sans être parabolique, une branche infinie admettant une direction asymptotique n'admette pas d'asymptote; cette circonstance se présente si $y - cx$ ne tend vers aucune limite et ne devient pas infini.

C'est ce qui arrive par exemple pour la courbe d'équation $y = x + \sin x$; $\frac{y}{x} = 1 + \frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 quand x devient infini, mais $y - x = \sin x$ oscille entre -1 et $+1$ sans avoir de limite.

II. Une branche infinie n'a pas nécessairement une direction asymptotique déterminée.

Si, par exemple, M est le point d'abscisse x de la courbe Γ d'équation $y = x(2 + \sin x)$, y est compris entre x et $3x$ et par suite devient infini avec x, M s'éloigne à l'infini; mais le coefficient directeur de la droite OM qui joint M à l'origine O est $\frac{y}{x} = 2 + \sin x$, il oscille entre 1 et 3 et ne tend vers aucune limite quand x devient infini, la droite OM ne tend pas vers une position limite.

3° **Complément relatif aux courbes d'équation $y = f(x)$. Emploi d'un développement limité.** — Soit Γ le graphe de la fonction f; nous supposons

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty .$$

Γ n'admet d'asymptote non parallèle à Oy que si

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = c, \qquad c \neq 0,$$

en d'autres termes, que si $f(x)$ est un infiniment grand du premier ordre par rapport à x.

Si ensuite $$\lim_{x \to \infty} [f(x) - cx] = d,$$

Γ admet pour asymptote la droite D représentée par l'équation $Y = cx + d$; c'est qu'alors on peut écrire

$$f(x) = cx + d + \varphi(x), \qquad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0.$$

Réciproquement, si l'ordonnée $y = f(x)$ du point M d'abscisse x de la courbe Γ peut se mettre sous cette forme et si H est le point d'abscisse x de la droite A qui a pour équation

$$Y = cx + d,$$

$\overline{HM} = y - cx - d$ tend vers zéro quand x devient infini, la branche infinie décrite par $M(x, y)$ est asymptote à A.

Cette observation présente un intérêt pratique évident, en particulier toutes les fois que les méthodes données à propos des développements limités per-

mettent d'écrire, pour des valeurs de x suffisamment grandes en valeur absolue,

$$y = cx + d + \frac{a_0}{x^p} + \frac{\varepsilon}{x^p},$$

ε étant infiniment petit avec $\frac{1}{x}$; ceci fait, on trouve immédiatement l'asymptote elle-même et la position des branches.

Plus généralement, supposons que l'on ait trouvé des constantes b_0, b_1, ... b_h, a_0 telles que, pour des valeurs de x suffisamment grandes en valeur absolue,

$$y = b_0x^h + b_1x^{h-1} + \ldots + b_h + \frac{a_0}{x^p} + \frac{\varepsilon}{x^p},$$

ε étant infiniment petit avec $\frac{1}{x}$. Dans ce cas, on peut obtenir des renseignements utiles pour le tracé de la courbe en construisant la courbe auxiliaire qui a pour équation

$$Y = b_0x^h + \ldots + b_h.$$

La différence $y - Y$ des ordonnées des points d'abscisse x des deux courbes tend vers zéro quand x devient infini. On dit que les deux courbes sont asymptotes l'une à l'autre.

EXEMPLE. — Soit $$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

une fonction rationnelle de x. Distinguons plusieurs cas :

1° *Le degré de f est inférieur à celui de g; y* tend vers zéro quand x devient infini l'axe $x'x$ est asymptote et l'étude du signe avec lequel y tend vers zéro quand x devient infini par valeurs positives ou négatives fait connaître la position des branches.

2° *Le degré de f est supérieur ou égal à celui de g.* On effectue la division suivant les puissances décroissantes de x du polynôme f par le polynôme g; si Q est le quotient et R le reste

$$y = Q + \frac{R}{g}, \qquad (d^\circ R < d^\circ g).$$

Si Q est du premier degré ou se réduit à une constante, l'équation $Y = Q$ qui s'écrit suivant le cas,

$$Y = cx + d \qquad \text{ou} \qquad Y = d,$$

représente une droite asymptote à la courbe, l'étude du signe avec lequel $\frac{R}{g}$ tend vers zéro quand x devient infini par valeurs positives ou négatives permet de placer les branches.

Si le degré du polynôme Q est supérieur ou égal à 2, la courbe a des branches paraboliques dont la direction asymptotique est celle de Oy, la courbe représentée par $Y = Q$ est asymptote à la courbe étudiée.

AUTRES EXEMPLES. — Voir les n^{os} 27, ex. II; 27, ex. III; 27, ex. IV.

4° **Complément relatif aux courbes asymptotes.** — Soit Γ la courbe d'équations $x = f(u)$, $y = g(u)$. Supposons que l'une au moins des coordonnées du point générique M devienne infinie lorsque u tend vers α, et supposons en outre qu'on puisse écrire

$$\begin{cases} f(u) = \varphi(u) + \xi(u) & \lim\limits_{u \to \alpha} \xi(u) = 0 \\ g(u) = \psi(u) + \eta(u) & \lim\limits_{u \to \alpha} \eta(u) = 0. \end{cases}$$

Soit Γ_1 courbe décrite par le point M_1 : $x_1 = \varphi(u)$, $y_1 = \psi(u)$; le vecteur $\overrightarrow{M_1M}$ joignant deux points associés de même paramètre u a pour limite $\vec{0}$ lorsque u tend vers α; on dit que Γ_1 est une courbe asymptote à Γ.

Si Γ_1 est plus facile à dessiner que Γ, son tracé préalable permettra de préciser les branches infinies de Γ. On pourra placer Γ par rapport à Γ_1 si l'on sait placer le vecteur $\overrightarrow{M_1M}$ de coordonnées $\xi(u)$ et $\eta(u)$ par rapport à Γ_1.

La méthode précédente est particulièrement recommandée si f et g sont des fractions rationnelles ayant le pôle α, φ et ψ étant alors les parties principales de f et g relatives à ce pôle.

EXEMPLE. — Voir le n° **28, ex. III.**

25. ***Limite d'une tangente dont le point de contact s'éloigne indéfiniment.*** — Soit Γ la courbe d'équation $y = f(x)$; la tangente T en un point M de Γ a pour équation

$$Y - y = y'(X - x) \qquad \text{ou} \qquad Y = y'X + (y - xy').$$

Supposons que, x tendant vers $+\infty$, T ait pour position limite la droite A d'équation

$$Y = cX + d;$$

c'est donc que lorsque x tend vers $+\infty$, $f'(x)$ tend vers c et $f(x) - xf'(x)$ tend vers d.

a)
$$y - xy' = x\left(\frac{y}{x} - y'\right);$$

comme le premier facteur devient infini, nécessairement le second facteur $\frac{y}{x} - y'$ tend vers zéro; en d'autres termes $\frac{y}{x}$ tend vers c, quand $x \to +\infty$ et la courbe Γ admet la direction de coefficient directeur c comme direction asymptotique.

b) Examinons alors si $\delta = y - cx$ a une limite quand $x \to +\infty$.

$$\delta = \frac{\frac{y}{x} - c}{\frac{1}{x}}.$$

δ se présente alors sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; or la règle de l'Hôpital (II, n° 78, 3°) s'applique aussi lorsque la variable devient infinie (1).

Le rapport des dérivées du numérateur et du dénominateur de δ est

$$\frac{\frac{xy' - y}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = y - xy' ;$$

ce rapport tendant vers d lorsque $x \to +\infty$, c'est que δ tend vers d.

La droite A, limite de T, est asymptote à Γ.

On peut donc énoncer :

THÉORÈME. — **Si la tangente en un point M d'une courbe plane Γ tend vers une position limite A lorsque M s'éloigne à l'infini sur Γ, la droite A est asymptote à la branche infinie décrite par le point M.**

REMARQUE. — De même que la réciproque de la règle de l'Hopital est fausse, celle du théorème précédent est fausse.

Le contre-exemple suivant le montre : la courbe $\Gamma\left(y = \frac{\sin x}{x}\right)$ est asymptote à l'axe Ox.

Or la tangente en M a pour équation

$$Y = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} X + \frac{2\sin x}{x} - \cos x ;$$

l'ordonnée à l'origine n'a pas de limite lorsque x devient infini; l'asymptote Ox n'est pas la limite d'une tangente.

---

(1) Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues et dérivables pour $x \geqslant A$, et telles que $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers 0 lorsque $x \to +\infty$; alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Par hypothèse

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \geqslant A \quad \text{tel que} \quad x > B \quad \Longrightarrow \quad c - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < c + \varepsilon.$$

Appliquons la formule des accroissements finis généralisés (II, n° 78, 2°) entre les valeurs x et x_1, supérieures à B l'une et l'autre.

$$m = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \xi \in]x_1, x[$$

Par suite

$$\left.\begin{matrix} x_1 > B \\ x > B \end{matrix}\right\} \quad \Longrightarrow \quad c - \varepsilon < m < c + \varepsilon.$$

Or x_1 restant fixe, $\lim_{x \to +\infty} m = \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$;

par suite $x_1 > B \quad \Longrightarrow \quad c - \varepsilon < \frac{f(x_1)}{g(x_1)} < c + \varepsilon$;

c'est donc que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers c lorsque $x \to +\infty$.

26. *Courbes unicursales.* — 1° DÉFINITION. — **On dit qu'une courbe plane Γ est unicursale lorsque les coordonnées cartésiennes de son point générique peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre.**

Une telle courbe a donc, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une représentation paramétrique (dite *représentation rationnelle*) de la forme

$$(1) \qquad x = \frac{f(u)}{\varphi(u)}, \qquad y = \frac{g(u)}{\psi(u)},$$

f, g, φ, ψ étant des polynômes sur le corps des réels; nous supposons f et φ d'une part, g et ψ d'autre part, premiers entre eux.

La propriété d'être unicursale est une propriété intrinsèque d'une courbe, car elle se conserve dans un changement quelconque du repère.

Supposons, pour simplifier, que les polynômes $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ n'aient pas de zéro réel et que x et y restent finis lorsque u devient infini : la courbe Γ, à distance finie, peut être dessinée d'un seul trait, c'est de ce fait que vient la dénomination de courbe unicursale. En particulier une courbe unicursale ne peut être constituée par deux ovales sans point commun.

En réduisant les fractions rationnelles (1) au même dénominateur, on peut obtenir une représentation rationnelle homogène de la courbe Γ sous la forme

$$X = F(t), \qquad Y = G(t), \qquad T = H(t),$$

F, G, H étant trois polynômes sur le corps des réels, premiers entre eux dans leur ensemble.

2° **Représentation propre d'une courbe unicursale.** — Si $M_0(x_0, y_0)$ est un point de Γ, obtenu pour la valeur u_0 du paramètre, les deux équations algébriques

$$(2) \qquad x_0\varphi(u) - f(u) = 0, \qquad y_0\psi(u) - g(u) = 0$$

ont pour racine commune u_0.

Si $M_0(x_0, y_0)$ est un point du plan, non situé sur Γ, les deux équations (2) n'ont pas de racine commune.

Le plus grand commun diviseur des polynômes

$$(3) \qquad x_0\varphi(u) - f(u), \qquad y_0\psi(u) - g(u)$$

est de degré au moins égal à 1 dans le premier cas; c'est une constante non nulle dans le second cas.

Or le plus grand commun diviseur de deux polynômes a pour coefficients des fonctions rationnelles des coefficients de ces deux polynômes; en particulier le plus grand commun diviseur des polynômes (3) s'exprime rationnellement en fonction de x_0 et y_0.

a) En écrivant que le plus grand commun diviseur des polynômes (3) est de degré au moins égal à 1, on exprime une condition nécessaire et suffisante pour que $M_0(x_0, y_0)$ appartienne à Γ, on forme donc l'équation cartésienne de Γ; cette équation est algébrique; *toute courbe unicursale est donc algébrique.*

b) $M_0(x_0, y_0)$ étant un point quelconque de Γ, si le plus grand commun diviseur des polynômes (3) est du premier degré, les deux équations (2) ont une seule racine commune en u; celle-ci est donnée par une expression de la forme

$$u = R(x_0, y_0), \tag{4}$$

où R est une fraction rationnelle sur le corps des réels; la représentation rationnelle de Γ est propre.

c) Dans le cas où la représentation rationnelle de Γ est propre, il peut se faire que pour un point exceptionnel (x_0, y_0) de Γ le plus grand commun diviseur des polynômes (3) soit de degré 2 au moins; si ce plus grand commun diviseur a au moins deux zéros réels, le point considéré est un point multiple de Γ (voir n° 28, ex. V).

d) Si $M_0(x_0, y_0)$ est un point quelconque de Γ et si le plus grand commun diviseur des polynômes (3) est de degré supérieur ou égal à 2, les équations (2) ont au moins deux racines communes en u, la représentation de Γ est impropre.

***3° Relation entre les diverses représentations rationnelles propres d'une courbe unicursale.** — Si les équations (1) donnent une représentation propre de la courbe unicursale Γ, toute transformation homographique

$$u = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

donne une nouvelle représentation rationnelle propre de Γ :

$$x = \frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)}, \qquad y = \frac{g_1(t)}{\psi_1(t)}, \tag{5}$$

f_1, φ_1, g_1, ψ_1 étant des polynômes sur le corps des réels, si, comme on le suppose α, β, γ, δ sont réels.

Inversement, supposons que les formules (1) et (5) soient deux représentations rationnelles propres de la courbe unicursale Γ. On a vu que si $M_0(x_0, y_0)$ est un point quelconque de Γ, la valeur u qui lui est associée est donnée par

$$u = R(x_0, y_0). \tag{4}$$

La valeur t associée au même point M_0 est donc telle que

$$u = R\left[\frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)}, \frac{g_1(t)}{\psi_1(t)}\right],$$

u est donc une fonction rationnelle de t, $\qquad u = S(t)$. (6)

En intervertissant le rôle des paramètres t et u, on verrait de même que t est une fonction rationnelle de u, ce qui n'est possible que si S est une fonction homographique; cette fonction homographique est propre, sinon on ne pourrait avoir une correspondance biunivoque entre M et t. Ainsi, toutes les représentations rationnelles propres d'une courbe unicursale se déduisent de l'une d'elles par des transformations homographiques effectuées sur le paramètre.

Application. — Étant donnés quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 sur Γ de paramètres u_1, u_2, u_3, u_4 dans une représentation rationnelle propre, on pose, par définition

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = (u_1, u_2, u_3, u_4).$$

Ce dernier birapport est en effet indépendant de la représentation rationnelle propre choisie pour Γ.

REMARQUE. — Si dans les formules (1) qui donnent une représentation rationnelle propre de Γ on fait la substitution

$$u = \frac{\lambda(t)}{\mu(t)},$$

λ et μ étant deux polynômes sur le corps des réels, premiers entre eux, dont l'un au moins est de degré au moins égal à 2, la nouvelle représentation rationnelle obtenue est impropre.

Si, inversement, une courbe unicursale est donnée par une représentation rationnelle impropre, on démontre qu'*on peut faire un changement rationnel de paramètre, $t = \omega(u)$, de façon que la nouvelle représentation rationnelle par rapport à t soit propre.*

Dans toute la suite, nous n'envisagerons que des représentations rationnelles propres.

4° Exemples classiques de courbes unicursales. — *a) Toute droite est une courbe unicursale et inversement.*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{A} \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix}$$

représente une droite si la matrice $\mathcal{A}$ est de rang 2.

b) Toute conique propre Γ est une courbe unicursale, comme on le constate en coupant Γ par une droite variable Δ passant par un point fixe L, à distance finie ou infinie, de Γ.

Si L est à distance finie, l'équation cartésienne de Γ s'écrit, en prenant l'origine en L,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 - (\alpha x + \beta y) = 0;$$

celle de Δ est

$$y = tx,$$

d'où les coordonnées du point d'intersection M variable avec t :

$$x = \frac{\alpha + \beta t}{a + 2bt + ct^2}, \qquad y = \frac{\alpha t + \beta t^2}{a + 2bt + ct^2},$$

Inversement

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{A} \begin{bmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

représente une conique propre si le rang de la matrice $\mathcal{A}$ est 3.

c) Considérons une courbe Γ du troisième ordre non décomposée représentée par une équation de la forme

$$\varphi_3(x, y) + \varphi_2(x, y) = 0$$

où $\varphi_2(x, y)$ et $\varphi_3(x, y)$ sont deux polynômes homogènes respectivement de degrés 2 et 3.

En coupant Γ par une droite Δ issue de O ($y = tx$), l'équation aux abscisses des points communs s'écrit

$$x^3\varphi_3(1, t) + x^2\varphi_2(1, t) = 0;$$

elle admet $x = 0$ pour racine double et $x = -\dfrac{\varphi_2(1, t)}{\varphi_3(1, t)}$ pour racine simple.

On traduit le fait que toute droite D menée par O coupe Γ en deux points confondus avec O en disant que ce point est un point double pour Γ. Le point M où D coupe Γ a pour coordonnées

$$x = -\frac{\varphi_2(1, t)}{\varphi_3(1, t)}, \qquad y = -\frac{t\varphi_2(1, t)}{\varphi_3(1, t)};$$

ces expressions sont des fonctions rationnelles de t, Γ est une courbe unicursale.

Plus généralement, une courbe Γ d'ordre n non décomposée, représentée par une équation de la forme

$$\varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) = 0$$

où φ_n et φ_{n-1} sont deux polynômes homogènes de degrés respectifs n et $n-1$ est unicursale.

5° **Points multiples d'une courbe unicursale.** — *a*) Si la représentation rationnelle (1) de la courbe Γ est propre, les équations (2), où M_0 (x_0, y_0) est un point quelconque de Γ, ont une racine commune en u, et une seule.

En exprimant que le plus grand commun diviseur des polynômes (3) est de degré 2 au moins, on exprime que M_0 est un point multiple de Γ.

b) On peut aussi chercher les points multiples, comme pour toute courbe définie paramétriquement, en cherchant deux valeurs réelles distinctes t et θ du paramètre u telles que

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \frac{f(\theta)}{\varphi(\theta)}, \qquad \frac{g(t)}{\psi(t)} = \frac{g(\theta)}{\psi(\theta)}. \tag{7}$$

Ces équations, rendues entières s'écrivent

$$f(t)\,\varphi(\theta) - f(\theta)\,\varphi(t) = 0, \qquad g(t)\,\psi(\theta) - g(\theta)\,\psi(t) = 0. \tag{8}$$

Après avoir divisé les premiers membres par $t - \theta$, on prendra pour inconnues auxiliaires $s = t + \theta$, $p = t\theta$. Si s_0, p_0 est une solution du système auxiliaire, t et θ sont les racines, distinctes en général, de l'équation

$$u^2 - s_0 u + p_0 = 0. \tag{9}$$

On devra rejeter les solutions formées de valeurs qui annulent à la fois φ et ψ; elles correspondent à des couples de points à l'infini.

Les coordonnées d'un point multiple L ainsi obtenu s'obtiennent sans résoudre l'équation (9) :

I) on peut remplacer chacun des polynômes f, φ, g, ψ par son reste dans la division euclidienne par $u^2 - s_0 u + p_0$;

II) on peut remplacer les valeurs communes des couples de rapports égaux (7) par

$$x = \frac{f(t) - f(\theta)}{\varphi(t) - \varphi(\theta)}, \qquad y = \frac{g(t) - g(\theta)}{\psi(t) - \psi(\theta)};$$

après division des deux termes de chaque rapport par $t - \theta$, il reste des polynômes symétriques en t et θ, donc des polynômes de s_0 et p_0.

REMARQUE I. — Si l'équation (9) a deux racines égales, on peut démontrer que le point obtenu est stationnaire.

REMARQUE II. — La méthode précédente ne s'applique que pour des valeurs finies du paramètre; il y aura lieu, le cas échéant, d'étudier si un point à distance finie obtenu pour la valeur infinie du paramètre peut aussi être obtenu pour une valeur finie du paramètre.

EXEMPLE. — Voir le n° 28, ex. V.

II. EXEMPLES DE CONSTRUCTIONS DE COURBES DÉTERMINÉES PAR UNE REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE

Les figures ont été faites en supposant le repère orthonormé.

27. ***Exemples de courbes*** $y = f(x)$. — EXEMPLE I. — Soit Γ (fig. 22) déterminée par

$$y = \frac{x^3 - 2x}{(x-1)^2(x+2)}$$

Si $x \to 1$, $y \sim \dfrac{-1}{3(x-1)^2}$; si $x \to -2$, $y \sim \dfrac{-4}{9(x+2)}$.

L'existence et les valeurs limites de y sont alors résumées dans le tableau

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
y	1		$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	0	$-\infty$	$\|\|$	$-\infty$	1	1

Ce tableau suffit à placer Γ par rapport aux asymptotes $A_1(x = 1)$ et $A_2(x = -2)$.

Pour placer Γ par rapport à l'asymptote $B(y = 1)$ on étudie

$$y - 1 = \frac{x-2}{(x-1)^2(x+2)} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{si } x \to \infty.$$

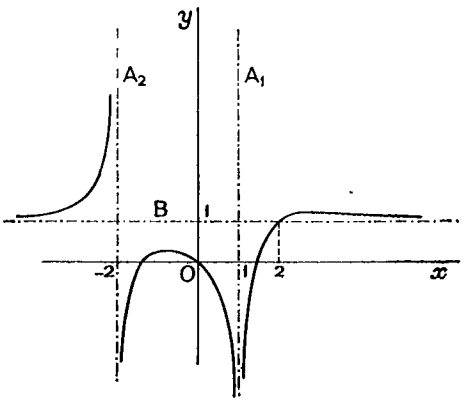


FIG. 22.

EXEMPLE II. — La fonction

$$y = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$$

est définie quel que soit x puisque l'indice du radical est impair; quand x devient infini, y est un infiniment grand équivalent à x; la courbe représentative Γ admet la direction de la première bissectrice pour direction asymptotique. Pour chercher l'asymptote, nous effectuons un développement limité généralisé de y suivant les puissances croissantes de l'infiniment petit $\dfrac{1}{x}$, en écrivant

$$y = x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} \quad \text{ou} \quad y = x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui donne

$$y = x - \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + \frac{\varepsilon}{x}, \qquad \lim_{x \to \infty} \varepsilon = 0$$

Γ admet pour asymptote la droite A représentée par $Y = x - \dfrac{1}{3}$, et le signe de $y - Y$ étant celui de $-\dfrac{1}{9x}$ pour x suffisamment grand en valeur absolue, Γ est au-dessous de A à droite et au-dessus de A à gauche (fig. 23). La courbe Γ est algébrique,

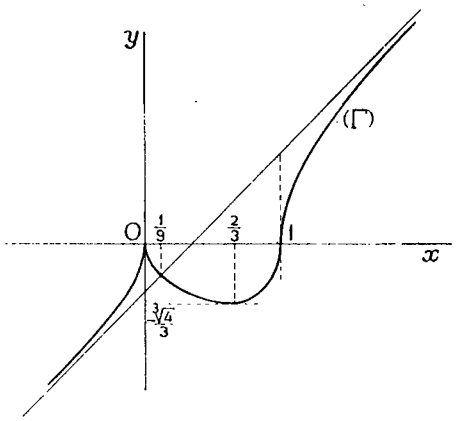


FIG. 23.

puisque son équation peut s'écrire $y^3 = x^3 - x^2$; l'équation qui donne les abscisses des points communs à Γ et à A se réduit au premier degré et admet pour racine $x = \frac{1}{9}$.

Le lecteur pourra préciser le tracé de la courbe en étudiant le signe de la dérivée

$$y' = \frac{1}{3}\frac{x(3x-2)}{[x^3-x^2]^{\frac{2}{3}}}.$$

Il constatera que O est un point de rebroussement de 1ère espèce,

EXEMPLE III. $\qquad y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$

La fonction y est définie quel que soit x, sauf pour $x = 0$; quand x devient infini, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers 1, et y est un infiniment grand du second ordre dont la partie principale est x^2; la courbe représentative Γ admet donc des branches paraboliques dans la direction de l'axe Oy. Un développement limité de $e^{\frac{1}{x}}$ permet d'écrire

$$y = x^2 + x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6x} + \frac{\varepsilon}{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \varepsilon = 0.$$

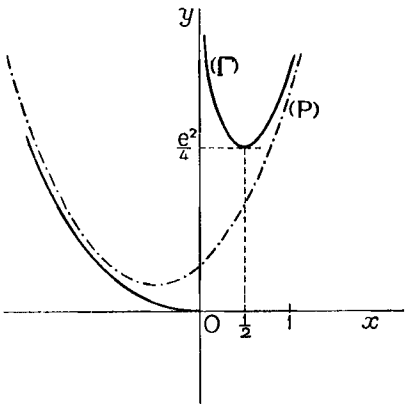


FIG. 24.

Il en résulte que la parabole P représentée par l'équation

$$Y = x^2 + x + \frac{1}{2}$$

est une courbe asymptote pour Γ; la différence $y - Y$ a le signe de $\frac{1}{6x}$ pour x suffisamment grand en valeur absolue, c'est donc que Γ est au-dessus de P à droite et au-dessous de P à gauche (fig. 24).

Le lecteur pourra préciser le tracé de Γ en étudiant le signe de la dérivée de y, soit $y' = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$, et en étudiant, pour toutes les valeurs de x, la disposition relative des courbes Γ et P, c'est-à-dire le signe de la différence $y - Y = x^2 e^{\frac{1}{x}} - \left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)$; ce signe est celui de la différence

$$z = \operatorname{Log} y - \operatorname{Log} Y = 2\operatorname{Log}|x| + \frac{1}{x} - \operatorname{Log}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right);$$

or on peut suivre la variation de z puisque la dérivée $z' = \frac{-1}{x^2(2x^2+2x+1)}$ est négative quel que soit x et montrer ainsi que z est négatif pour x négatif et positif pour x positif.

Lorsque x tend vers zéro à gauche, y tend vers zéro, et l'arc correspondant de Γ est tangent à l'axe Ox.

EXEMPLE IV. $\qquad y = \left(x + 2 - \frac{1}{x}\right)\operatorname{Arc\,tg} x.$

La fonction y est définie quel que soit x, sauf pour $x = 0$; lorsque x tend vers 0, le premier facteur est un infiniment grand équivalent à $-\frac{1}{x}$, le second est un infiniment petit équivalent à x, et y tend vers -1; un développement limité de y au voisinage de 0, $y = -1 + 2x + \frac{4}{3}x^2 + \varepsilon x^2$ permet de tracer la tangente au point correspondant et fait connaître la disposition de la courbe par rapport à cette tangente (fig. 25).

Lorsque x devient infini par valeurs positives, Arc tg$x$ tend vers $\frac{\pi}{2}$, et y est un infiniment grand équivalent à $\frac{\pi}{2}x$; nous étudierons la branche infinie correspondante en écrivant, pour $x > 0$,

$$\text{Arc tg}x = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{\varepsilon}{x^3}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \varepsilon = 0$$

et par suite $$y = \frac{\pi}{2}x + \pi - 1 - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)\frac{1}{x} + \frac{\varepsilon'}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \varepsilon' = 0$$

ce qui donne l'asymptote $\left(Y = \frac{\pi}{2}x + \pi - 1\right)$ et la disposition par rapport à l'asymptote.

Lorsque x devient infini par valeurs négatives, Arc tg$x$ tend vers $-\frac{\pi}{2}$, et y est un infiniment grand équivalent à $-\frac{\pi}{2}x$; nous étudierons la branche infinie correspondante en écrivant, pour $x < 0$,

$$\text{Arc tg}x = -\frac{\pi}{2} - \text{Arc tg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{\varepsilon}{x^3}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \varepsilon = 0$$

et par suite $$y = -\frac{\pi}{2}x - (\pi + 1) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)\frac{1}{x} + \frac{\varepsilon'}{x}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \varepsilon' = 0$$

d'où l'asymptote $\left(Y = -\frac{\pi}{2}x - (\pi + 1)\right)$ et la disposition par rapport à l'asymptote.

La courbe représentative rencontre Ox aux points dont les abscisses sont racines du trinôme $x^2 + 2x - 1$, c'est-à-dire $-1 \pm \sqrt{2}$.

Étudions la dérivée de y :

$$y' = \frac{x^2+1}{x^2}\left[\text{Arc tg}x + \frac{x(x^2 + 2x - 1)}{(x^2+1)^2}\right]$$

la quantité z entre crochets a une dérivée rationnelle,

$$\frac{-4x(x^2 - 2x - 1)}{(x^2+1)^3},$$

ce qui permet d'en suivre la variation pour en obtenir le signe.

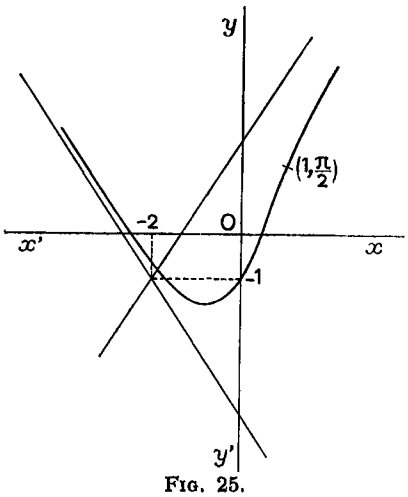


FIG. 25.

Le tableau suivant montre que z s'annule pour une valeur négative x_0; pour $x = -1$, z prend la valeur $\frac{2-\pi}{4}$, ce qui montre que x_0 est supérieur à -1.

La variation de y s'en déduit immédiatement.

x	$-\infty$		x_0		$1-\sqrt{2}$		0		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
z'			$+$		0	$-$	0	$+$	0	$-$	
z	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$+$	↗	0	↘	0	↗	$+$	↘	$\frac{\pi}{2}$
y'		$-$	0				$+$				
y	$+\infty$	↘	m	↗			-1	↗			$+\infty$

EXEMPLE V. $y = x \sin x$.

La fonction est définie sur $]-\infty, +\infty[$, elle est paire; il nous suffira donc de construire le graphe Γ sur $[0, +\infty[$. Comme $\sin x$ varie entre -1 et $+1$, $|y| \leqslant |x|$, c'est-à-dire que Γ se trouve dans la région du plan qui est limitée par les deux bissectrices $O\Delta$ et $O\Delta'$ et contient l'axe Ox (fig. 26).

Lorsque $\sin x = 1$, c'est-à-dire pour $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, le point correspondant de Γ est situé sur la première bissectrice $O\Delta$ et en ce point Γ est tangente à $O\Delta$, comme le montre le calcul de la dérivée.

$$y' = x \cos x + \sin x.$$

Lorsque $\sin x = -1$, c'est-à-dire pour $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, Γ est tangente à la seconde bissectrice $O\Delta'$.

La courbe Γ coupe Ox aux points qui ont pour abscisses $k\pi$; la branche infinie obtenue lorsque x devient infini ne présente pas de direction asymptotique puisque $\frac{y}{x} = \sin x$ n'a pas de limite dans ces conditions. Ces renseignements permettent de tracer une ébauche de la courbe.

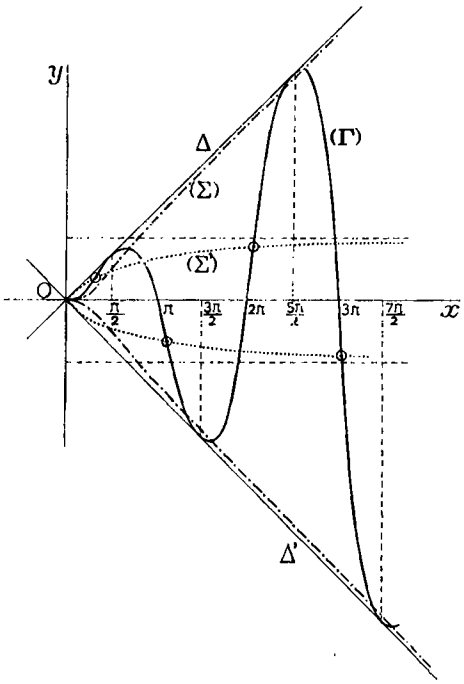


FIG. 26.

Étudions la répartition des points M où la tangente est parallèle à Ox; ces points ont pour abscisses les racines de l'équation $\operatorname{tg} x = -x$; l'étude de l'intersection du graphe de la fonction $\operatorname{tg} x$ avec la seconde bissectrice montre qu'une telle racine existe dans chaque intervalle $\left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi\right)$; les points M sont situés sur une courbe algébrique car pour ces points l'égalité $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ donne $\sin^2 x = \frac{x^2}{1 + x^2}$ et $y^2 = \frac{x^4}{1 + x^2}$.

La courbe Σ représentée par l'équation précédente contient tous les points M; on la construit aisément en dessinant le graphe de la fonction $\frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$ et en en prenant le symétrique par rapport à Ox; Σ est asymptote aux deux bissectrices $O\Delta$ et $O\Delta'$.

Étudions la répartition des points d'inflexion I de Γ; comme $y'' = -x \sin x + 2 \cos x$, ces points ont pour abscisses les racines de l'équation $\operatorname{tg} x = \frac{2}{x}$; une étude graphique montre qu'une telle racine existe dans chacun des intervalles $\left(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$; les points I sont situés sur une courbe algébrique car pour ces points

$$\sin^2 x = \frac{4}{4 + x^2} \qquad \text{et} \qquad y^2 = \frac{4x^2}{x^2 + 4};$$

la courbe Σ' représentée par l'équation précédente se construit aisément, elle contient les points I; ceux-ci ont été entourés sur la figure 26.

28. ***Exemples de courbes d'équations*** $x = f(u)$, $y = g(u)$. — EXEMPLE I. — *Construire la courbe* C *représentée par les équations*

$$x = \frac{u-1}{u}, \qquad y = \frac{u^2}{u+1}.$$

Nous ferons varier u sur $]-\infty, +\infty[$, aucune symétrie ne se remarquant *a priori*. La variation de x se trouve immédiatement si l'on écrit $x = 1 - \frac{1}{u}$; celle de y résulte du calcul de la dérivée $y' = \frac{u(u+2)}{(u+1)^2}$, ce qui permet de commencer le tableau que le lecteur trouvera plus loin et qui doit être complété au fur et à mesure des renseignements obtenus sur la courbe. Ce tableau met en évidence les asymptotes Ox, $\Delta(x = 1)$, $\Delta'(x = 2)$ obtenues respectivement pour u tendant vers 0, ∞, -1, et permet de placer C par rapport à ces asymptotes.

u	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
x	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$ $+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0		$+$		

REMARQUE I. — Le tracé semble indiquer que C est symétrique par rapport à la droite D d'abscisse $\frac{3}{2}$. Cherchons, pour savoir s'il en est ainsi, la relation qui lie les paramètres u_1 et u_2 de deux points de C situés sur une parallèle à Ox : u_1 et u_2 sont racines de l'équation

$$u^2 - yu - y = 0,$$

par suite $u_1 + u_2 = y$, $u_1 u_2 = -y$

et
$$u_1 u_2 + u_1 + u_2 = 0. \qquad (1)$$

Ces deux points sont symétriques par rapports à D si

$$(2) \qquad \frac{u_1 - 1}{u_1} + \frac{u_2 - 1}{u_2} = 3,$$

ce qui a bien lieu, la relation (2) étant équivalente à la relation (1).

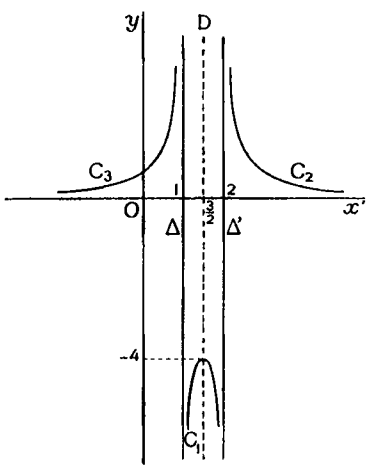


FIG. 27.

REMARQUE II. — L'équation cartésienne de C s'obtient en résolvant la première équation par rapport à u et en portant la valeur ainsi trouvée dans la seconde, ce qui donne

$$(3) \qquad y = \frac{1}{(x-1)(x-2)};$$

la symétrie par rapport à D est ainsi mise en évidence.

REMARQUE III. — Les équations

$$(4) \qquad x = \frac{u^2 - 1}{u^2}, \qquad y = \frac{u^4}{u^2 + 1}$$

qui se déduisent des équations de C en remplaçant u par u^2 déterminent un point M dont les coordonnées vérifient l'équation (3). A tout point M de la courbe C définie par l'équation (3) correspondent deux valeurs de u opposées, racines de l'équation

$$u^2 = \frac{1}{1-x};$$

si le paramètre u est réel, les formules (4) ne permettent de représenter que l'arc C_3 de la figure n° 27; cet arc est parcouru deux fois quand u varie de $-\infty$ à $+\infty$.

EXEMPLE II. — *Construire la courbe* C *représentée par les équations*

$$x = \operatorname{tg} u + \sin u, \qquad y = \frac{1}{\cos u}.$$

La recherche des symétries se fait à l'aide des schémas ci-dessous; dans la colonne de gauche figurent les valeurs initiales de u, x, y; dans la colonne de droite figurent la nouvelle valeur donnée à u, et les nouvelles valeurs correspondantes de l'abscisse et de l'ordonnée.

u	$u + 2\pi$
x	x
y	y

C est obtenue pour un intervalle d'amplitude 2π $[-\pi, +\pi]$

u	$-u$
x	$-x$
y	y

symétrie Oy

$[-\pi, 0]$ et $[0, \pi]$

Nous retiendrons l'intervalle $[0, \pi]$; dans cet intervalle, les fonctions x et y de u sont définies et continues, sauf pour $u = \frac{\pi}{2}$.

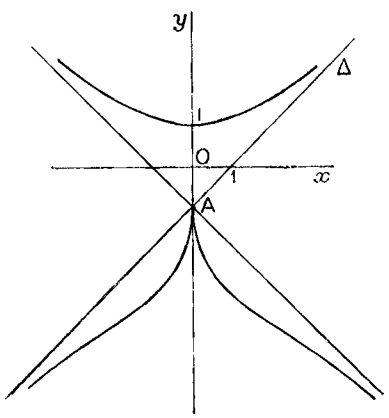


FIG. 28.

Lorsque u tend vers $\frac{\pi}{2}$, x et y deviennent infinies; le rapport

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sin u(1 + \cos u)}$$

tend vers 1, et la différence

$$y - x = \frac{1 - \sin u}{\cos u} - \sin u$$

peut s'écrire, en posant $u = \frac{\pi}{2} - h$,

$$y - x = \operatorname{tg}\frac{h}{2} - \cos h,$$

elle tend vers -1 lorsque h tend vers 0; enfin

$$y - x + 1 = \operatorname{tg}\frac{h}{2} + (1 - \cos h)$$

est un infiniment petit équivalent à $\frac{h}{2}$, ce qui montre que lorsque h tend vers $+0$, le point M de C qui s'éloigne indéfiniment vers la droite de la figure décrit une branche infinie asymptote à la droite $\Delta(Y - X + 1 = 0)$, au-dessus de Δ; lorsque h tend vers -0, M décrit une branche infinie asymptote à Δ, au-dessous de Δ, vers la gauche de la figure.

C se compose de deux arcs simples continus, C_1 correspondant à $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, et C_2 correspondant à $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

On précise le tracé en cherchant les tangentes à C

1° pour $u = 0$: $\dfrac{y-1}{x} = \dfrac{1-\cos u}{\sin u(1+\cos u)}$ admet la limite 0

2° pour $u = \pi$: $\dfrac{y+1}{x} = \dfrac{1}{\sin u}$ devient infini.

EXEMPLE III. — *Construire la courbe* Γ *représentée par les équations*

$$x = \frac{u^2+1}{2u} \qquad y = \frac{2u-1}{u^2}.$$

Le calcul des dérivées

$$x' = \frac{u^2-1}{2u^2}, \qquad y' = \frac{-2(u-1)}{u^3}$$

permet de dresser le tableau suivant :

u	$-\infty$		-1		0		$+1$		$-\infty$
x	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$+\infty$ $\mid$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ $\mid$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Pour $u = 1$, x passe par un minimum et y passe par un maximum; le point A (1, 1) est un point de rebroussement pour Γ. Le coefficient directeur de la tangente en un point quelconque est $m = \dfrac{-4}{u(u+1)}$ et par suite la tangente en A a pour coefficient directeur la valeur limite de m pour u tendant vers 1, c'est-à-dire -2. D'autre part $\dfrac{dm}{du} = \dfrac{4(2u+1)}{u^2(u+1)^2}$ n'est pas nul pour $u = 1$, c'est donc que A est un point de rebroussement de première espèce.

Contrôlons ce résultat en étudiant la disposition de Γ par rapport à la tangente de rebroussement; celle-ci a pour équation

$$Y + 2X - 3 = 0.$$

Si P et M sont deux points de même abscisse, le premier sur la tangente en A, le second sur Γ

$$\overline{PM} = y - (-2x + 3)$$

ou $$y + 2x - 3 = \frac{(u-1)^3}{u^2}.$$

$\overline{PM}$ change de signe quand u passe par la valeur 1.

Le point I obtenu pour $u = -\dfrac{1}{2}$, valeur annulant $\dfrac{dm}{du}$, est un point d'inflexion.

Les branches infinies de Γ s'obtiennent immédiatement en décomposant les fractions rationnelles x et y en éléments simples :

$$x = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2}, \qquad y = -\frac{1}{u^2} + \frac{2}{u}.$$

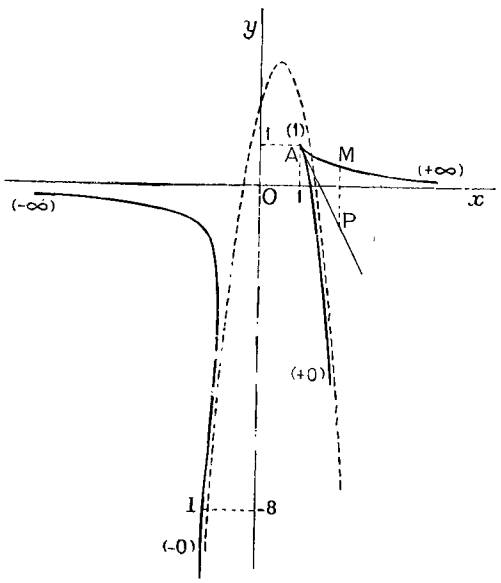


FIG. 29.

a) l'axe Ox est asymptote $(u \to \infty)$;

b) la direction asymptotique Oy $(u \to 0)$ est celle d'une branche parabolique.

En posant

$$x_1 = \frac{1}{2u}, \qquad y_1 = -\frac{1}{u^2} + \frac{2}{u},$$

on obtient un point M_1 qui décrit une parabole $\mathcal{P}_1 (y_1 = -4x_1^2 + 4x_1)$ asymptote à Γ : $\overrightarrow{M_1M}$ a pour coordonnées $\left(\frac{u}{2}, 0\right)$ et a pour limite $\vec{0}$.

Appelons N le point de $\mathcal{P}_1$ qui a même abscisse x que M; l'ordonnée de ce point est

$$-4x^2 + 4x, \qquad \text{où} \qquad x = \frac{u^2+1}{2u},$$

si bien que

$$\overline{NM} = \frac{2u-1}{u^2} + \frac{(u^2+1)^2}{u^2} - \frac{2(u^2+1)}{u}$$

$$\overline{NM} = 2 - 2u + u^2,$$

et le vecteur $\overrightarrow{NM}$ ne tend pas vers $\vec{0}$.

La parabole $\mathcal{P}_1$ n'est donc pas la meilleure approximation pour la branche infinie parabolique de Γ.

En prenant la parabole $\mathcal{P}_2$

$$y_2 = -4x^2 + 4x + 2,$$

deux points M et M_2, sur Γ et sur $\mathcal{P}_2$, ayant même abscisse, sont tels que $\overline{M_2M} = -2u + u^2$ tende vers 0; c'est cette parabole qui est dessinée sur la figure 29; le signe de $\overline{M_2M}$ permet de placer Γ par rapport à $\mathcal{P}_2$.

EXEMPLE IV. — *Construire la courbe* C *représentée par*

$$x = \cos 3u, \qquad y = \sin 2u.$$

La recherche des symétries se fait à l'aide des schémas ci-dessous; dans la colonne de gauche figurent les valeurs initiales u, x, y; dans la colonne de droite figurent la nouvelle valeur donnée à u et les nouvelles valeurs correspondantes de l'abscisse et de l'ordonnée.

$u \mid u + 2\pi$	$u \mid u + \pi$	$u \mid -u$	$u \mid \pi - u$
$x \mid x$	$x \mid -x$	$x \mid x$	$x \mid -x$
$y \mid y$	$y \mid y$	$y \mid -y$	$y \mid -y$
C est obtenue pour un intervalle d'amplitude 2π	symétrie Oy	symétrie Ox	symétrie O

[La troisième symétrie résulte de la composition des deux premières.]

Nous indiquons sous chaque schéma les segments retenus pour la variation de u

$[0, 2\pi]$ $\qquad$ $[0, \pi]$ et $[\pi, 2\pi]$ $\qquad$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Finalement l'arc générateur γ de Γ est l'image du segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; on construira le symétrique γ' de γ par rapport à O; puis le symétrique C_2 par rapport à Oy de l'arc C_1, réunion de γ et γ'.

Le tableau suivant donne la variation de x et de y :

u	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
x	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

C se compose de deux arcs simples continus, C_1 et C_2.

La courbe est tout entière à l'intérieur du carré dont les côtés ont pour équations $x = \pm 1$ et $y = \pm 1$. Sur la figure 30 nous avons indiqué les valeurs du paramètre pour les points qui ont servi à jalonner le tracé.

L'ébauche de la courbe met en évidence des points, symétriques deux à deux par rapports aux axes ou par rapport à O, où se croisent deux arcs distincts de cette courbe. Chacun de ces points correspond à deux valeurs distinctes u et u' du paramètre telles que

$$\cos 3u' = \cos 3u, \quad \sin 2u' = \sin 2u$$

les valeurs u et u' appartenant toutes deux au segment $[0, 2\pi]$; nous supposerons $u' > u$.

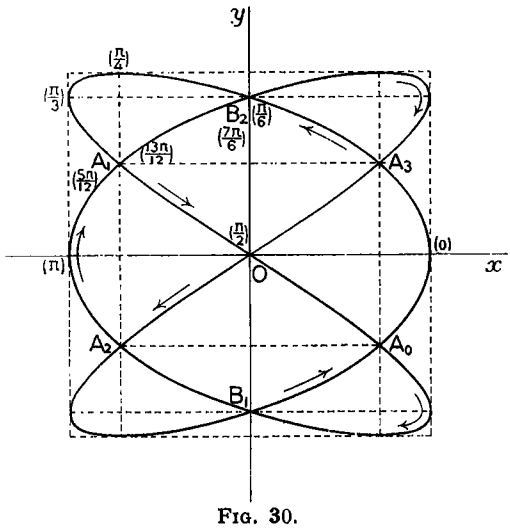


FIG. 30.

La première de ces équations exige

soit (1) $3u' = 3u + 2k\pi$,

ou $$u' - u = \frac{2k\pi}{3} \qquad (D_k)$$

soit (1') $3u' = -3u + 2k\pi$,

ou $$u' + u = \frac{2k\pi}{3}, \qquad (D'_k)$$

et la deuxième

soit (2) $2u' = 2u + 2h\pi$,

ou $$u' - u = h\pi \qquad (\Delta_h)$$

soit (2') $2u' = \pi - 2u + 2h\pi$,

ou $$u' + u = \frac{\pi}{2} + h\pi, \qquad (\Delta'_h)$$

h et k étant des entiers quelconques.

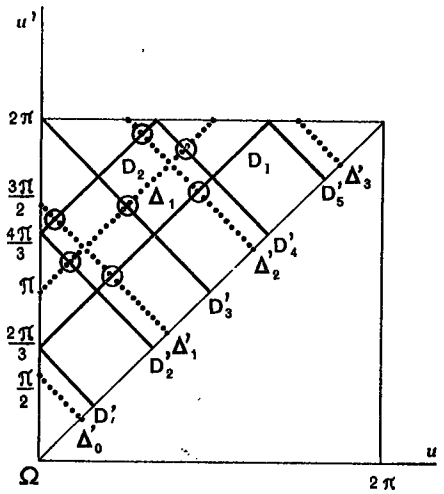


FIG. 31.

Pour résoudre le système constitué par l'une des équations (1) ou (1') avec l'une des équations (2) ou (2'), nous nous aiderons d'une représentation graphique; nous construirons les droites D_k, D'_k, Δ_h, Δ'_h associées aux équations (1), (1'), (2), (2') dans un repère Ou, Ou', en nous bornant à la région

$$u \in [0, 2\pi], \qquad u' \in [0, 2\pi] \qquad u' > u.$$

Sur la figure 31, nous avons représenté en trait fort continu les segments gardés des droites D_1, D_2, D'_1, D'_2, D'_3, D'_4, et en pointillé fort les segments gardés des droites Δ_1, Δ'_0, Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3 (Sur le cahier, ou au tableau noir, on utilise deux couleurs différentes).

$D_1 \cap \Delta'_1$ donne $u = \frac{5\pi}{12}$, $\quad u' = \frac{13\pi}{12}$ et le point $A_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

$D_1 \cap \Delta_2'$ donne $u = \frac{11\pi}{12}$, $u' = \frac{19\pi}{12}$ et le point A_3 symétrique de A_1 par rapport à Ox

$D_2 \cap \Delta_1'$ donne $u = \frac{\pi}{12}$, $u' = \frac{17\pi}{12}$ et le point A_2 symétrique de A_1 par rapport à Oy

$D_2 \cap \Delta_2'$ donne $u = \frac{7\pi}{12}$, $u' = \frac{23\pi}{12}$ et le point A_6 symétrique de A_1 par rapport à O.

$\Delta_1 \cap D_2'$ donne $u = \frac{\pi}{6}$, $u' = \frac{7\pi}{6}$ et le point $B_2\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Delta_1 \cap D_3'$ donne $u = \frac{\pi}{2}$, $u' = \frac{3\pi}{2}$ d'où l'origine

$\Delta_1 \cap D_4'$ donne $u = \frac{5\pi}{6}$, $u' = \frac{11\pi}{6}$ et le point B_1 symétrique de B_2 par rapport à O.

EXEMPLE V. — *Construire la courbe* C *déterminée par*

$$x = \frac{u^3}{u^2 - 9}, \qquad y = \frac{u(u-2)}{u-3}.$$

Le tableau suivant résume les intervalles où x et y sont simultanément définies.

u	$-\infty$		-3		$+3$		$+\infty$
x	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$	$-\infty$	$+\infty$		$+\infty$

1° *Branches infinies.* — Leur recherche est simplifiée si l'on commence par décomposer les fractions rationnelles x et y en éléments simples.

$$\begin{cases} x = u + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{u-3} + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{u+3} \\ y = u + 1 + \frac{3}{u-3} \end{cases}$$

I. Lorsque $u \to -3$, $x \sim \frac{9}{2}\frac{1}{u+3}$, $y + \frac{5}{2} = \frac{(2u-5)(u+3)}{2(u-3)}$, $y + \frac{5}{2} \sim \frac{11}{12}(u+3)$ donne la disposition de C par rapport à l'asymptote $\Delta\left(Y = -\frac{5}{2}\right)$.

Pour $u = \frac{5}{2}$, le point U de C est sur Δ.

II. Lorsque $u \to 3$, $x \sim \frac{9}{2}\frac{1}{u-3}$, $y \sim \frac{3}{u-3}$, $\lim_{u\to 3}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2}{3}$;

$$y - \frac{2}{3}x = \frac{u}{3} + 1 - \frac{3}{u+3}; \quad \lim_{u\to 3}\left(y - \frac{2}{3}x\right) = \frac{3}{2}$$

$$y - \frac{2}{3}x - \frac{3}{2} = \frac{(u-3)(2u+9)}{6(u+3)} \sim \frac{5}{12}(u-3).$$

Les branches infinies de C sont au-dessus de l'asymptote $D\left(Y = \frac{2}{3}X + \frac{3}{2}\right)$ à droite, et au-dessous de D à gauche.

Pour $u = -\frac{9}{2}$, le point V de C est sur D.

III. — Si $u \to \infty$, $x \sim u$, $y \sim u$, $\lim_{u\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = 1$

$$y - x = 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{u-3} - \frac{9}{2}\frac{1}{u+3}.$$

$$\lim_{u\to\infty}(y-x) = 1 \qquad \text{et} \qquad y - x - 1 = \frac{-6u+9}{u^2-9} \sim -\frac{6}{u}$$

Les branches infinies de C sont au-dessous de l'asymptote D'($Y = X + 1$) à droite, et au-dessus de D' à gauche.

Pour $u = \frac{3}{2}$, le point V' de C est sur D'.

En marquant sur une figure les branches infinies qui viennent d'être obtenues, les points sur les asymptotes, et en observant que C passe à l'origine, point où la tangente est Oy, on peut tracer une ébauche de la courbe (fig. 32).

2° *Point double.* — Cette ébauche montre l'existence d'un point double L.

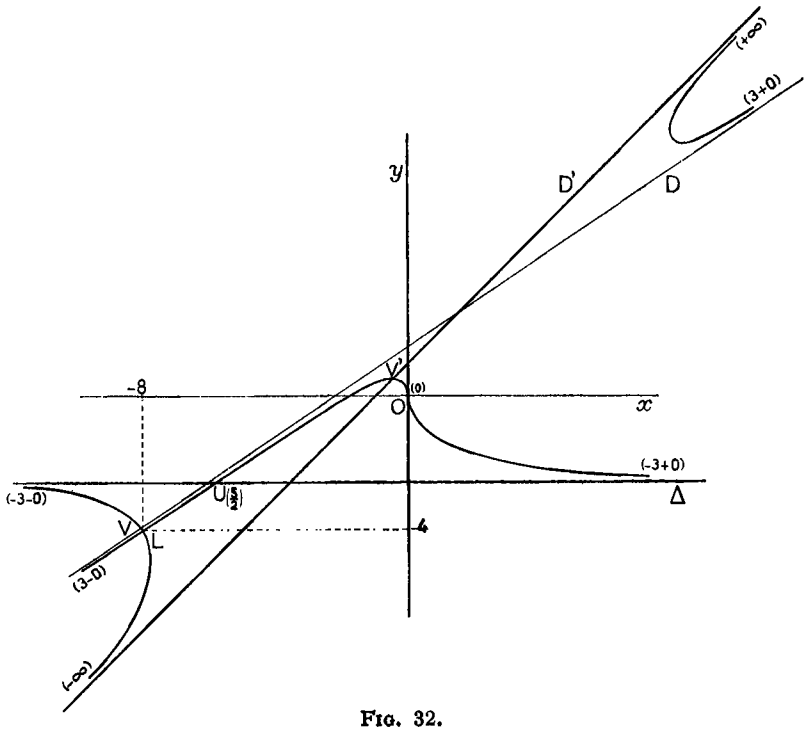


FIG. 32.

1re *méthode.* L correspond à deux valeurs distinctes du paramètre, t et θ, telles que

$$\frac{t^3}{t^2-9} = \frac{\theta^3}{\theta^2-9}, \qquad \frac{t^2-2t}{t-3} = \frac{\theta^2-2\theta}{\theta-3}.$$

Rendons entières les équations précédentes, nous obtenons

(1) $$t^3(\theta^2-9) - \theta^3(t^2-9) = 0$$

(2) $$(t^2-2t)(\theta-3) - (\theta^2-2\theta)(t-3) = 0.$$

Le polynôme qui figure au premier membre de chacune des équations (1) et (2) est divisible par $t-\theta$; en groupant les termes qui se déduisent les uns des autres par permutation de t et θ et changement de signe, nous écrivons

$$t^2\theta^2(t-\theta) - 9(t-\theta)(t^2+t\theta+\theta^2) = 0$$
$$t\theta(t-\theta) - 3(t-\theta)(t+\theta) + 6(t-\theta) = 0$$

d'où, après simplification,

(3) $$t^2\theta^2 - 9[(t+\theta)^2 - t\theta] = 0.$$

(4) $$t\theta - 3(t+\theta) + 6 = 0.$$

Le système obtenu est symétrique par rapport à t et θ; nous le résolvons en prenant pour nouvelles inconnues $t + \theta = s$, $t\theta = p$, ce qui donne

(5) $\qquad p^2 - 9s^2 + 9p = 0, \qquad$ (6) $\quad p - 3s + 6 = 0.$

L'équation (5) peut s'écrire, en tenant compte de (6),

(7) $\qquad p^2 - (p+6)^2 + 9p = 0 \qquad$ ou $\qquad p = -12.$

La résolution des équations (6) et (7) donne finalement $p = -12$, $s = -2$; t et θ sont racines de l'équation

(8) $\qquad u^2 + 2u - 12 = 0.$

Les coordonnées x et y du point double obtenu L sont données par

$$x = \frac{t^3 - \theta^3}{t^2 - \theta^2} = \frac{s^2 - p}{s} \qquad \text{d'où} \qquad x = -8$$

$$y = \frac{t^3 - \theta^3 - 2(t - \theta)}{t - \theta} = s - 2 \qquad \text{d'où} \qquad y = -4.$$

2e méthode. — Si x et y sont les coordonnées d'un point quelconque M de C, les équations

(9) $\qquad u^3 - xu^2 + 9x = 0 \qquad$ (10) $\quad u^2 - (y+2)u + 3y = 0$

ont une solution commune en u; le système précédent est équivalent au système formé par (10) et

(11) $\qquad (-x + y + 2)u^2 - 3yu + 9x = 0.$

Si x et y sont les coordonnées du point double L, les équations (10) et (11) ont deux solutions communes, ce qui exige la proportionnalité de leurs coefficients, d'où

(12) $\qquad -x + y + 2 = \frac{3y}{y+2} = \frac{3x}{y}.$

Les deux équations (12) sont du premier degré en x; elles ont une seule solution $x = -8$ $y = -4$.

3e *méthode.* — *Relation d'alignement de trois points.* Si l'on donne deux points $M_1(u_1)$ et $M_2(u_2)$ de C, la droite M_1M_2 est déterminée, elle recoupe C en un point $M_3(u_3)$ déterminé; il existe donc une relation entre les valeurs du paramètre relatives à trois points alignés de la courbe C. Pour l'obtenir, il faut et il suffit qu'on puisse trouver les coefficients α, β, γ de l'équation d'une droite $\Delta(\alpha x + \beta y + \gamma = 0)$ de façon que l'équation aux u des points communs à Δ et C admette u_1, u_2, u_3 pour racines. Or cette équation s'écrit

(13) $\qquad (\alpha + \beta)u^3 + (\beta + \gamma)u^2 - 6\beta u - 9\gamma = 0$

et en appelant s_1, s_2, s_3 les fonctions symétriques fondamentales de u_1, u_2, u_3, des conditions nécessaires et suffisantes pour que u_1, u_2, u_3 soient racines de (13) s'écrivent

(14) $\qquad s_1 = -\frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta} \qquad s_2 = \frac{-6\beta}{\alpha + \beta} \qquad s_3 = \frac{9\gamma}{\alpha + \beta}.$

α, β, γ étant donnés sous forme homogène, nous détruisons l'homogénéité en posant $\alpha + \beta = 1$, ce qui simplifie les relations (14) :

(14') $\qquad s_1 = -(\beta + \gamma), \qquad s_2 = -6\beta, \quad s_3 = 9\gamma$

d'où immédiatement la relation

$$s_1 = \frac{s_2}{6} - \frac{s_3}{9} \qquad \text{ou} \qquad 18s_1 - 3s_2 + 2s_3 = 0; \qquad (15)$$

on en déduit, en introduisant les fonctions symétriques fondamentales de u_1 et u_2

$$s = u_1 + u_2, \qquad p = u_1u_2$$

(16) $\qquad \lambda u_2 - 3\mu = 0 \qquad \begin{cases} \lambda = 2p - 3s + 18 \\ \mu = p - 6s. \end{cases}$

La relation (16) détermine u_3 en fonction de u_1 et u_2, sauf précisément quand les points associés à u_2 et u_3 coïncident avec le point double L de C, c'est-à-dire si $\lambda = 0$, $\mu = 0$, d'où $s = -2$, $p = -12$ et on retrouve l'équation (8).

REMARQUE. — L'équation de la sécante M_1M_2, u_1 et u_2 étant quelconques, est, d'après les valeurs (14')

$$3\,s_2(x-y) + 18\,x + 2\,s_3 = 0$$

équation dans laquelle on donne à u_3 la valeur (16); on obtient ainsi

$$(p\lambda + 3\,s\mu)\,(x-y) + 6\,\lambda x + 2\,p\mu = 0.$$

En faisant $u_1 = u_2 = u$, on obtient l'équation de la tangente en M (u).

III. PROBLÈMES DIVERS SUR LES COURBES PLANES REPRÉSENTÉES PARAMÉTRIQUEMENT

29. ***Tangente et normale.*** — Nous supposerons la courbe Γ représentée paramétriquement par

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u); \quad \Longleftrightarrow \quad x = f(u), \qquad y = g(u).$$

1° **Tangente.** — Nous savons (n° 12) que la tangente en un point non stationnaire est dirigée par le vecteur $\vec{F}'(u)$, et a pour équation

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'}.$$

Rappelons (II, n° 78, 2°) que si l'arc M_1M_2 d'une courbe plane dérivable ne présente pas de point stationnaire, il existe entre M_1 et M_2 un point M où la tangente est parallèle à la corde M_1M_2.

2° **Normale.** — Supposons le repère orthonormé; la normale en un point M non stationnaire a pour équation

$$(X-x)\,x' + (Y-y)\,y' = 0.$$

3° **Tangentes et normales passant par un point donné P (x_0, y_0) du plan.** — Qu'on ait à étudier l'équation de la tangente ou celle de la normale, cette équation est celle d'une famille de droites Δ dépendant du paramètre u. Cette équation, préalablement simplifiée et réduite, est de la forme

$$X\,\varphi(u) + Y\,\psi(u) + \theta(u) = 0; \tag{1}$$

pour qu'une droite Δ passe par P (x_0, y_0), il faut et il suffit que le paramètre u de cette droite vérifie l'équation

$$x_0\,\varphi(u) + y_0\,\psi(u) + \theta(u) = 0. \tag{2}$$

A toute racine u de l'équation (2) correspond une droite Δ passant par P.

4° Équation tangentielle. — DÉFINITION. — **On appelle équation tangentielle d'une courbe Γ une condition nécessaire et suffisante pour que la droite Δ dont les coordonnées tangentielles sont U, V, W soit tangente à cette courbe.**

Nous avons déjà rencontré cette notion à propos du cercle, (III, n° 93) et à propos d'une conique propre (III, n° 228).

Si l'équation (1) du 3° est celle de la tangente en M(u) à Γ, la droite Δ

$$UX + VY + W = 0$$

coïncide avec celle-ci, si, et seulement si, il existe une valeur u telle que

$$\frac{\varphi(u)}{U} = \frac{\psi(u)}{V} = \frac{\theta(u)}{W}. \tag{3}$$

L'élimination de u entre les deux équations donne l'équation tangentielle cherchée.

5° EXEMPLE I. — *a*) Soit E l'ellipse représentée dans un repère quelconque $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par

$$x = a\cos u, \qquad y = b\sin u, \qquad u \in [0,\ 2\pi[.$$

Nous écrirons l'équation de la tangente en M(u), d'abord sous la forme

$$\frac{x - a\cos u}{-a\sin u} = \frac{y - b\sin u}{b\cos u},$$

puis

$$\frac{x}{a}\cos u + \frac{y}{b}\sin u - 1 = 0.$$

L'équation qui donne les paramètres des points de contact des tangentes menées par le point P(x_0, y_0) est

$$\frac{x_0}{a}\cos u + \frac{y_0}{b}\sin u - 1 = 0.$$

Cette équation en u a deux racines dans [0, 2π[pourvu que

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 > 0.$$

L'inégalité précédente caractérise les points extérieurs à E.

b) En supposant le repère orthonormé, l'équation de la normale à E en M(u) se met d'abord sous la forme

$$-(x - a\cos u)\,a\sin u + (y - b\sin u)\,b\cos u = 0$$

puis

$$-ax\sin u + by\cos u + c^2\sin u\cos u = 0; \qquad c^2 = a^2 - b^2.$$

L'équation qui donne les valeurs du paramètre u aux points d'incidence des normales menées par le point P(x_0, y_0) est

$$c^2\sin u\cos u - ax_0\sin u + by_0\cos u = 0. \tag{4}$$

Nous ne discuterons pas cette équation; nous nous bornerons à observer que l'équation (4) est celle qui donne les u des points d'intersection de l'ellipse E avec l'hyperbole équilatère (H) représentée par l'équation obtenue en remplaçant dans l'équation (4) $\cos u$ et $\sin u$ respectivement par $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$, c'est-à-dire

$$c^2xy + b^2y_0x - a^2x_0y = 0.$$

Dans le plan $\mathcal{E}_C$, complexifié de $\mathcal{E}_2$, on peut donc mener d'un point P de ce plan quatre normales, réelles ou imaginaires, à l'ellipse; observons que, H passant au centre de E, deux d'entre elles sont certainement réelles.

EXEMPLE II. — *Trouver et construire le lieu géométrique* C *des points du plan d'où l'on peut mener à la courbe* Γ *représentée par les équations*

$$x = 3u^2, \qquad y = 2u^3$$

deux tangentes rectangulaires.

La courbe C est appelée courbe orthoptique relative à Γ, c'est-à-dire courbe lieu des points d'où l'on voit Γ sous un angle droit.

La construction de Γ est immédiate (fig. 33); son équation cartésienne est

$$4x^3 - 27y^2 = 0.$$

La tangente en M(u) a pour équation

$$ux - y - u^3 = 0;$$

La valeur du paramètre u relative au point M est le coefficient directeur de la tangente à Γ en ce point; l'équation qui donne les coefficients directeurs des tangentes issues d'un point P(x_0, y_0) du plan est donc

$$u^3 - x_0 u + y_0 = 0. \tag{1}$$

Pour que P soit un point de C, il faut et il suffit que l'équation (1) admette deux racines u' et u'' vérifiant la relation $u'u'' = -1$; or le produit des trois racines u', u'', u''' de l'équation (1) est $-y_0$; pour que $u'u'' = -1$, il faut et il suffit que $u''' = y_0$, sous réserve que y_0 soit différent de zéro. En écrivant que y_0 est racine de l'équation (1) on trouve ainsi, après division par $y_0 \neq 0$,

$$y_0^2 - x_0 + 1 = 0.$$

La courbe orthoptique C est donc la parabole représentée par l'équation $x = y^2 + 1$.

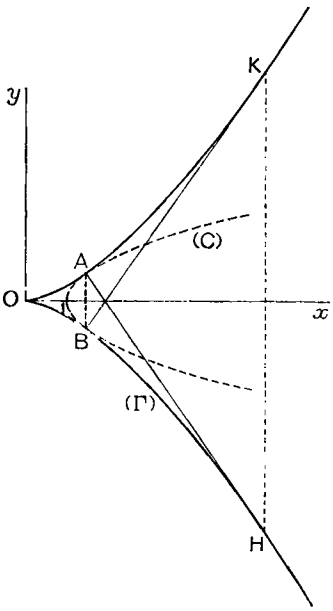


FIG. 33.

Pour tracer C sur la même figure que Γ (fig. 33) il importe d'étudier d'abord l'intersection de ces deux courbes; l'équation qui donne les abscisses des points communs est

$$4x^3 - 27x + 27 = 0, \qquad \text{ou} \qquad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 (x + 3) = 0.$$

La racine double $\frac{3}{2}$ correspond à un double contact des courbes C et Γ aux points A et B d'abscisse $\frac{3}{2}$ et d'ordonnées $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. La racine -3 peut s'interpréter si l'on se place dans le plan $\mathcal{E}_C$, complexifié de $\mathcal{E}_2$; elle correspond à deux points imaginaires conjugués E et F d'ordonnées $\pm 2i$; les valeurs du paramètre en ces points sont $\pm i$; ces points sont ceux de Γ où la tangente est isotrope; une telle tangente étant perpendiculaire à elle-même, on s'explique que ces points fassent partie de la courbe orthoptique C.

Du point A on peut mener à Γ deux tangentes confondues suivant la tangente AT en A à Γ, et une autre tangente dont le point de contact est un point H; puisque A est sur la courbe orthoptique C, c'est que AH est la normale en A à Γ; la droite AH est tangente en H à Γ et normale en A à Γ.

30. *Droites coupant une courbe plane en plusieurs points confondus.* — 1° Les points communs à la courbe Γ représentée par

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u) \quad \text{ou} \quad x = f(u), \qquad y = g(u)$$

et à la droite Δ d'équation

$$Ax + By + C = 0$$

correspondent aux valeurs du paramètre qui sont racines de l'équation

(1) $\qquad \mathcal{F}(u) = 0, \qquad$ avec $\qquad \mathcal{F}(u) = Af(u) + Bg(u) + C.$

On rappelle que tous les éléments qui interviennent sont réels et que par suite l'équation (1) est étudiée sur le corps R.

Si, comme on le suppose, Γ est un arc simple continu, ou une succession d'arcs simples continus, à chaque racine de (1) correspond un point commun à Γ et Δ, et à deux racines distinctes correspondent deux points communs distincts, sauf si Δ passe par un point multiple d'ordre p : l'équation (1) admet alors comme racines les p valeurs de u associées à ce point.

2° **Droites coupant Γ en deux points confondus au moins.** — Pour interpréter les racines multiples éventuelles de l'équation (1) nous supposerons que, en utilisant des restrictions, nous avons pu nous limiter au cas où Γ est le support d'un arc géométrique simple de classe C^k, ce qui élimine les difficultés dues aux points multiples. Nous reprenons la notation du n° 13; $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u)$ est un paramétrage admissible dans lequel le point M_0 de Γ correspond à la valeur u_0 du paramètre; $\mathcal{V}_i$ désigne, $(1 \leqslant i \leqslant k)$, le $i^{\text{ième}}$ sous-espace fondamental en M_0, engendré par $\left(\vec{F}'(u_0), \ldots, \vec{F}^{(i)}(u_0)\right)$.

La droite Δ la plus générale qui contient M_0 a pour équation

$$A(x - f(u_0)) + B(y - g(u_0)) = 0$$

et l'équation (1) s'écrit ici

(2) $\qquad \mathcal{F}(u) = 0 \qquad$ avec $\qquad \mathcal{F}(u) = A[f(u) - f(u_0)] + B[g(u) - g(u_0)].$

Cette équation admet u_0 pour racine, à un ordre de multiplicité $m \geqslant 1$ tel que

(3) $\qquad \mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}'(u_0) = \ldots = \mathcal{F}^{(m-1)}(u_0) = 0, \qquad \mathcal{F}^{(m)}(u_0) \neq 0.$

Or $\mathcal{F}^{(i)}(u_0) = 0$, qui s'écrit $A f^{(i)}(u_0) + B g^{(i)}(u_0) = 0$, est une condition nécessaire et suffisante pour que la direction $\vec{\Delta}$ de Δ (qui est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\vec{\mathcal{E}}$) contienne le vecteur $\vec{v}_i = \vec{F}^{(i)}(u_0)$; m se trouve ainsi défini comme le naturel tel que Δ contient le sous-espace fondamental $\mathcal{V}_{m-1}$, sans contenir $\mathcal{V}_m$; il s'agit d'une notion intrinsèque, en ce sens qu'elle ne dépend pas du choix du paramétrage admissible (dont les sous-espaces fondamentaux sont indépendants); *nous dirons que Δ coupe Γ en m*

points confondus avec M_0 *quand* u_0 *est racine d'ordre* m *de l'équation* $\mathcal{F}(u) = 0$.

Rappelons que nous avons désigné par p et q, $(1 \leqslant p < q)$, les deux plus petits entiers naturels tels que $\{\vec{v}_p, \vec{v}_q\}$ constitue une base de $\vec{\mathcal{E}}$. Le sous-espace fondamental $\mathcal{V}_p$, de dimension 1, est la direction de la tangente T en M_0. On a $\mathcal{V}_{q-1} = \mathcal{V}_p$, mais $\mathcal{V}_q \neq \mathcal{V}_p$.

On en déduit que : si $\Delta \neq T$ alors $m = p$; si $\Delta = T$ alors $m = q$.

Dans le cas usuel où M_0 n'est pas stationnaire ($p = 1$), on retiendra :

a) ***Exprimer qu'une droite*** Δ ***coupe*** Γ *en deux points au moins confondus avec un point* **M** ***non stationnaire, c'est exprimer que*** Δ ***est tangente en*** M *à* Γ.

b) **Toute droite passant par un point stationnaire coupe Γ en deux points au moins confondus avec ce point stationnaire.**

APPLICATION. — **Pour former l'équation tangentielle de Γ, c'est-à-dire pour exprimer que la droite Δ donnée par ses coordonnées tangentielles A, B, C est tangente à Γ, on peut écrire que l'équation (1) admet une racine double en u.**

C'est ainsi que si Γ est l'ellipse représentée par $x = a\cos u$, $y = b\sin u$, l'équation (1) devient $Aa\cos u + Bb\sin u + C = 0$, et elle admet une racine double si, et seulement si $a^2A^2 + b^2B^2 - C^2 = 0$, ce qui donne l'équation tangentielle de l'ellipse.

3° **Droites coupant Γ en trois points au moins confondus.** – *a*) M_0 est encore un point ordinaire de Γ,

$$\left(\vec{v}_1 \neq 0,\ p = 1\right).$$

La seule droite qui coupe Γ en plusieurs points confondus en M_0 est donc la tangente T, laquelle coupe en q points. Or $q = 2$ ou $q \geqslant 3$ selon que le système de vecteurs $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right)$ est libre ou lié, c'est-à-dire selon que M_0 n'est pas ou est point d'inflexion géométrique.

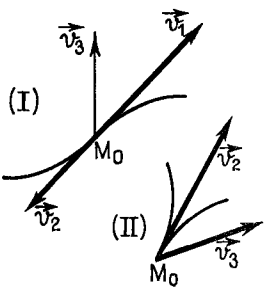


FIG. 34.

On retiendra (cf. fig. 34, I)

Exprimer qu'une droite Δ *coupe* Γ *en trois points confondus avec un point ordinaire* M_0, *c'est exprimer que* M_0 *est un point d'inflexion analytique et que* Δ *est la tangente en* M_0.

b) M_0 est point stationnaire de Γ, $\left(\vec{v}_1 = \vec{0},\ p \geqslant 2,\ q \geqslant 3\right)$. **Une droite passant par M_0 coupe Γ en au moins deux points confondus en M_0 si elle n'est pas tangente, en au moins trois points confondus en M_0 si elle est tangente.** La figure 34, II correspond au cas où **M_0 est un point de rebroussement de première espèce.**

EXEMPLE. — **Nous avons obtenu au n° 28, ex. V la relation d'alignement de 3 points d'une cubique unicursale C :**

(5) $$18(u_1 + u_2 + u_3) - 3(u_2u_3 + u_3u_1 + u_1u_2) + 2\,u_1u_2u_3 = 0.$$

Si $I(u)$ est un point d'inflexion de C, la tangente en I à C coupe C en 3 points confondus

avec I; la relation précédente est donc vérifiée quand on y remplace u_1, u_2, u_3 par u, ce qui donne

(6) $$2u^3 - 9u^2 + 54u = 0 \quad \text{ou} \quad u[2u^2 - 9u + 54] = 0.$$

C admet un point d'inflexion et un seul, l'origine. En considérant C dans le plan affine $\mathcal{E}_C$, complexifié de $\mathcal{E}_2$, nous disons que C admet trois points d'inflexion, O et deux points d'inflexion imaginaires conjugués, et que ces 3 points sont alignés car la relation (5) est vérifiée par les racines de l'équation (6).

4° Emploi d'une représentation paramétrique en coordonnées homogènes. — L'étude précédente peut être reprise avec la courbe Γ représentée en coordonnées homogènes par

$$X = f(u), \qquad Y = g(u), \qquad T = \theta(u).$$

Les points communs avec la droite Δ

$$AX + BY + CT = 0$$

correspondent aux zéros de la fonction

$$\Phi(u) = Af(u) + Bg(u) + C\theta(u).$$

Bornons-nous à examiner le cas où M n'est pas stationnaire.

Δ coupe Γ en 2 points confondus avec M $\iff$ $\begin{cases} \Phi(u) = 0 \\ \Phi'(u) = 0 \end{cases}$ $\iff$ Δ est la tangente MM' (cf n° 16)

Δ coupe en 3 points confondus avec M $\iff$ $\begin{cases} \Phi(u) = 0 \\ \Phi'(u) = 0 \\ \Phi''(u) = 0 \end{cases}$ $\iff$ $\begin{vmatrix} f(u) & g(u) & \theta(u) \\ f'(u) & g'(u) & \theta'(u) \\ g''(u) & g''(u) & \theta''(u) \end{vmatrix} = 0.$

l'équation précédente fournit les points d'inflexion analytique de Γ.

EXERCICES

1. — Construire la courbe admettant pour équation $y = f(x)$, $f(x)$ étant l'une des fonctions suivantes :

$$\sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{x^3-1}; \quad \sqrt{1 + 2x\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1 - 2x\sqrt{1-x^2}}; \quad 2x + 1 \pm \sqrt{\frac{8x^3+1}{x}}$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{ch} x - x; \quad e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}; \quad \frac{x^2+1}{x-1}e^{\frac{1}{x}}; \quad xe^{\frac{2x}{x^2-1}}; \quad x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x; \quad (1+\operatorname{tg} x)^{\sin x}.$$

2. — Étudier les branches infinies des courbes admettant pour équation $y = f(x)$, où $f(x)$ est l'une des fonctions suivantes :

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{x}{x-1} - \frac{4x^2}{2x-1}; \qquad x^2 \operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{x+1}; \qquad xe^{\operatorname{Arc\,tg} x};$$

$$x^{\operatorname{th} x}; \quad (1+x)^{\operatorname{coth} x}; \quad x^{1+\frac{1}{(\operatorname{Log} x)^2}}; \quad (x+1)^{1+\frac{1}{\operatorname{Log} x}}.$$

$$y = x + \sqrt{\frac{x^2(x+2)}{x+1}}.$$

3. — Étudier la déformation, quand le paramètre a varie, de la courbe d'équation

$$y = \operatorname{Log}\frac{1-x}{1-ax}; \quad y = (\operatorname{ch} x + a \operatorname{sh} x)^{\frac{1}{x}}; \quad y = a^x - x; \quad y = a^{(a^x)};$$

(pour la dernière on déterminera le lieu des points d'inflexions éventuels).

4. — Démontrer que la courbe d'équation $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ possède un centre de symétrie.

5. — Construire la courbe définie paramétriquement par les équations

$$\begin{cases} x = \dfrac{u^2-1}{u} \\ y = \dfrac{u+1}{u(u-1)} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{u+1}{u(u-1)} \\ y = \dfrac{u(u+1)}{u-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{u}{u^4-1} \\ y = \dfrac{u^2}{u^4-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{u^3}{1-u^2} \\ y = \dfrac{u-2}{(1-u)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-u}{1+u^4} \\ y = \dfrac{u-u^5}{1+u^4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{u} + \dfrac{2}{u+1} + \dfrac{3}{u-1} \\ y = \dfrac{2}{u} + \dfrac{3}{u+1} + \dfrac{1}{u-1} \end{cases}$$

(Asymptotes; équation tangentielle; condition d'alignement de trois points; inflexions).

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos 3u} \\ y = \dfrac{1}{\sin 2u} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cos^2 u(\cos u + \cos 2u) \\ y = \sin^2 u(\sin u + \sin 2u) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \operatorname{tg} u + \operatorname{cotg} u \\ y = \operatorname{tg} 2u + \operatorname{cotg} 2u \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\operatorname{ch} u}{u} \\ y = \dfrac{\operatorname{sh} u}{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = ue^{\frac{2}{u}} \\ y = (u-2)e^{-\frac{1}{u}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cos^2 u + \operatorname{Log}|\sin u| \\ y = \sin u \cos u \end{cases} \qquad \begin{cases} x = u \operatorname{Log} u \\ y = \dfrac{1}{u} \operatorname{Log} u \end{cases} \qquad \begin{cases} x = e^u \sin u \\ y = \dfrac{1}{\operatorname{sh} u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{(u^2+1)^2}{u^4+3u^2+1} \\ y = \dfrac{u(u^2+1)}{u^4+3u^2+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{1-u^2} \\ y = \displaystyle\int_0^u \frac{1-t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\cos u \cos 2u}{\sin^2 u} - \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right| \\ y = 2\dfrac{\cos^2 u}{\sin u} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} \\ y = \dfrac{\cos u}{\operatorname{sh} u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos\dfrac{t}{3} + \sin\dfrac{t}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\cos^2 t}{\sin t \cos 2t} \\ y = \dfrac{\sin^2 t}{\cos t \cos 2t} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sin t \\ y = \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t}. \end{cases}$$

6. — Construire les courbes définies paramétriquement par les équations :

$$\begin{cases} x = t^3 + t^4 \\ y = t^6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^5 + t^6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t^3 + t^4 \\ y = t^6 + t^7 \end{cases}$$

(étude directe au voisinage de l'origine).

7. — Discuter, suivant la valeur de λ, la forme des courbes Γ_λ représentées par les équations

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 u - \lambda \cos u \\ y = \operatorname{tg} u + \lambda \sin u \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{u(u-\lambda)}{(u-1)^2} \\ y = \dfrac{1}{u(u-1)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \cos\theta + \lambda \cos 2\theta \\ y = \sin\theta - \lambda \sin 2\theta. \end{cases}$$

8. — Soit Γ la courbe d'équations paramétriques

$$x = u^2 + \frac{\alpha}{u} \qquad y = (u+1)^2 + \frac{\beta}{u}.$$

Déterminer α et β de manière que Γ admette un point de rebroussement R de paramètre donné λ. Trouver alors, lorsque λ varie, le lieu de ce point R; démontrer que l'asymptote passe par un point fixe. Construire une courbe Γ de la famille (parabole asymptote).

9. — Construire la courbe Γ dont les équations paramétriques (repère orthonormé) sont

$$x = \frac{2(1-u)}{(1+u^2)^2} \qquad y = \frac{u(u+1)^3}{(1+u^2)^2}.$$

Étant donné le point M (u) de Γ, déterminer un point M' (u') tel que les tangentes à Γ en M et M' soient symétriques en direction par rapport à la première bissectrice des axes. Montrer que Γ a un axe de symétrie et donner une représentation paramétrique de Γ telle que deux points symétriques aient des paramètres inverses.

10. — Une strophoïde S étant représentée dans un repère orthonormé par l'équation

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) - 2xy = 0,$$

on définit un point M de la courbe par le coefficient directeur t de la droite OM, O étant l'origine : 1° Trouver les valeurs de t qui correspondent aux intersections de S avec ses asymptotes réelles ou imaginaires, aux points où la tangente est parallèle à l'asymptote réelle, aux points d'inflexion, vérifier que ces derniers sont alignés. Les points où les tangentes en trois points alignés recoupent S sont eux-mêmes alignés. A un point M on associe le point M' tel que le point N commun aux tangentes M et M' soit sur S; former l'équation de la droite MM' et calculer les coordonnées du milieu de MM' en fonction du paramètre t de N.

2° Quelle relation doit lier t, t_1, t_2, t_3 pour que les points correspondants soient sur un même cercle (points cocycliques)? Équation du cercle γ qui rencontre S en trois points confondus avec M, ce cercle γ recoupe S en un point P. A quatre points M cocycliques correspondent quatre points P cocycliques; à trois points M alignés correspondent trois points P situés sur un cercle qui passe par un point fixe de S.

3° Il existe deux familles de cercles qui sont tangents à S en deux points, former l'équation générale des cercles de chaque famille; les cercles d'une famille restent orthogonaux à un cercle fixe, trouver le lieu de leurs centres. Que dire des droites joignant les points de contact?

11. — Soit Γ une cubique plane qui admet le point d'inflexion I. Une droite variable passe par I et recoupe Γ en P et Q. Lieu du point M, conjugué harmonique de I par rapport à P et Q.

12*. — Soit Γ la courbe (lemniscate de Bernouili) définie dans un repère orthonormé par

$$x = a\frac{t}{1+t^4} \qquad y = a\frac{t^3}{1+t^4}.$$

De chaque point M de Γ on peut mener à la courbe quatre tangentes autres que la tangente en M (avec des restrictions concernant la réalité). Montrer que les points de contact de ces tangentes sont situés sur une droite D (M). Trouver l'enveloppe de D (M) quand M décrit Γ.

CHAPITRE IV

COURBES GAUCHES DÉTERMINÉES PAR UNE REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE

Nous reprenons les notations du n° 13, en nous intéressant plus spécialement au cas de $\mathcal{E}_3$.

Γ est le support d'un arc géométrique simple, donné, de classe C^k, $(k \geqslant 2)$, dont on a choisi un paramétrage admissible $\left(I, \vec{F}\right)$, qui s'écrit

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u) \qquad \text{ou} \qquad x = f(u), \quad y = g(u), \quad z = h(u).$$

I. PLAN OSCULATEUR. ÉTUDE LOCALE

31. ***Tangente., Plans tangents. Plan normal.*** — **1° Tangente.** — Nous avons montré au n° 14, 1° que la tangente en un point M non stationnaire est dirigée par le vecteur $\vec{F}'(u)$ et nous avons obtenu ses équations au n° 14, 2°.

En un point stationnaire $\left[\vec{F}'(u) = \vec{0}\right]$ la tangente est dirigée par le premier des vecteurs $\vec{F}^{(p)}(u)$ qui n'est pas nul en ce point (cf. n° 14).

2° Plan tangent. — *On appelle plan tangent à* Γ *en* M *tout plan contenant la tangente en* M.

Soit $$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

l'équation d'un plan contenant le point non stationnaire $M(x, y, z)$ de Γ. Pour que ce plan soit tangent, il faut et il suffit que

$$Ax' + By' + Cz' = 0.$$

3° Normales. Plan normal. — *On appelle normale en* M *à* Γ *toute droite passant par* M *et perpendiculaire à la tangente, et plan normal en* M *à* Γ *le plan mené par* M *perpendiculaire à la tangente*; le plan normal est le lieu des normales.

Si le repère est orthonormé, le plan normal au point non stationnaire M a pour équation

$$(X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0.$$

32. *Plan osculateur.* — 1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit Γ le support d'un arc géométrique simple de classe C^k de l'espace affine $\mathcal{E}_3$ et soit M un point de Γ. Nous nous plaçons dans le cas où il existe p et q, plus petits entiers positifs tels que, en M, les sous-espaces fondamentaux $\mathcal{V}_p$ et $\mathcal{V}_q$ aient les dimensions 1 et 2, étant entendu que dans le cas usuel $p = 1$ et $q = 2$; nous désignons par $\mathcal{R}$ le plan dont un point est M et dont la direction est $\mathcal{V}_q$. Dans ces conditions le plan $\mathcal{P}_{M_1}$ déterminé par la tangente T en M à Γ et par le point générique M_1 de $\Gamma - \{M\}$ tend vers $\mathcal{R}$ quand M_1 tend vers M. On dit que $\mathcal{R}$ est le plan osculateur en M à Γ.**

La formule de Taylor s'écrit ici, en désignant par $u + \omega$ la valeur du paramètre qui correspond à M_1

$$\overrightarrow{MM_1} = \sum_{i=p}^{q-1} \frac{\omega^i}{i!}\vec{v}_i + \frac{\omega^q}{q!}\vec{W}_q,$$

$$\lim_{\omega \to 0} \vec{W}_q = \vec{v}_q$$

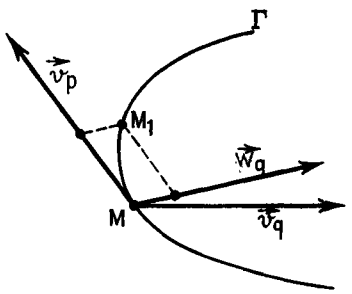


FIG. 35.

Elle fait apparaître $\overrightarrow{MM_1}$ comme la somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}_p$ et d'un vecteur colinéaire à $\vec{W}_q$ (fig. 35). Comme $\vec{W}_q$ admet pour limite $\vec{v}_q$, on peut supposer, en utilisant une restriction si cela est nécessaire que, pour tout $\omega \neq 0$, $\vec{W}_q$ n'est ni nul, ni colinéaire à $\vec{v}_p$. D'où l'existence de $\mathcal{P}_{M_1}$ qui est le plan $\Pi(u + \omega)$ de $\mathcal{E}_3$ qui contient T et dont la direction contient $\vec{W}_q$. On a, comme au n° 14, en utilisant ici le n° 10, 2° :

$$\lim_{\omega \to 0} \Pi(u + \omega) = \mathcal{R} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_{M_1} = \Pi\left(\left(\vec{F}\right)^{-1}(M_1)\right).$$

La proposition en résulte.

2° **Equation du plan osculateur.** — Limitons-nous au cas usuel qui est celui où $p = 1$ et $q = 2$, c'est-à-dire celui où le système de vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est libre; $\mathcal{R}$ est alors le plan de $\mathcal{E}_3$ dont un point est M et dont la direction contient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, c'est-à-dire le plan d'équation

$$\begin{vmatrix} X - f(u) & f'(u) & f''(u) \\ Y - g(u) & g'(u) & g''(u) \\ Z - h(u) & h'(u) & h''(u) \end{vmatrix} = 0.$$

Quand aucune confusion ne sera à craindre nous écrirons x, x', x'' pour $f(u)$, $f'(u)$, $f''(u)$ et ainsi de suite.

REMARQUE. — Soit ρ une application numérique définie sur I et continûment dérivable, arbitrairement choisie. L'application $\vec{V} = \rho \vec{F'}$ de I dans $\vec{\mathcal{E}_3}$ admet la dérivée $\vec{V'} = \rho' \vec{F'} + \rho \vec{F''}$. En un point M (u) de Γ tel que

$$\{ \vec{V}(u), \vec{V'}(u) \}$$

soit un système libre de vecteurs de $\vec{3_3}$, les sous-espaces fondamentaux $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ ont les dimensions respectives 1 et 2; $\{ \vec{V}(u), \vec{V'}(u) \}$ est une base de $\mathcal{V}_2$, qui peut être utilisée pour définir le plan osculateur $\mathcal{R}$ en M à Γ. Si nous adoptons la notation

$$\vec{V}(u) = \alpha(u)\vec{i} + \beta(u)\vec{j} + \gamma(u)\vec{k},$$

$\mathcal{R}$ admettra pour équation :

$$\begin{vmatrix} X - f(u) & \alpha(u) & \alpha'(u) \\ Y - g(u) & \beta(u) & \beta'(u) \\ Z - h(u) & \gamma(u) & \gamma'(u) \end{vmatrix} = 0.$$

3° **Compléments.** — I. En nous limitant encore au cas usuel où $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est libre, démontrons que le plan $\mathcal{Q}_{M_1}$ **mené par la tangente T à Γ en M parallèlement à la tangente T_1 au point générique M_1 de $\Gamma - \{M\}$ admet le plan osculateur $\mathcal{R}$ en M pour limite quand M_1 tend vers M.**

Pour $|\omega|$ assez petit, le vecteur $\vec{F'}(u + \omega)$ est non nul et il dirige T_1. Par la formule de Taylor, il s'écrit

$$\vec{F'}(u + \omega) = \vec{v_1} + \frac{\omega}{1!}\vec{W'_2}, \qquad \lim_{\omega \to 0} \vec{W'_2} = \vec{v_2}.$$

La démonstration s'achève comme celle du théorème du 1°.

II. Sous réserve des conditions énumérées au 2° $[(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est libre$]$, nous avons **démontré que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ déterminés par la tangente en M, et respectivement par un autre point M_1 de la courbe et la direction de la tangente en M_1, tendent vers la même position limite quand M_1 tend vers M. Examinons brièvement le cas où ces conditions ne sont pas remplies.**

Prenons M(u) pour origine des coordonnées et la tangente MT en ce point pour axe des abscisses.

Le plan $\mathcal{P}$ déterminé par MT et le point $M_1(u_1)$ a pour équation

$$\frac{z}{y} = \frac{h(u_1)}{g(u_1)}.$$

D'après le théorème des accroissements finis généralisé, il existe au moins un nombre u' entre u et u_1 tel que

$$\frac{h(u_1) - h(u)}{g(u_1) - g(u)} = \frac{h'(u')}{g'(u')}.$$

c'est dire que le plan $\mathfrak{X}$ peut aussi être représenté par l'équation

$$\frac{z}{y} = \frac{h'(u')}{g'(u')}$$

et par suite le plan $\mathfrak{X}$ coïncide avec le plan $\mathfrak{Q}$ relatif au point $M'(u')$ de l'arc MM_1.

Si $\frac{h'(u')}{g'(u')}$ tend vers une limite quand u' tend vers u, il en est de même du rapport $\frac{h(u_1)}{g(u_1)}$, u_1 tendant vers u, mais la réciproque n'est pas vraie. Nous concluons de là que si le plan $\mathfrak{Q}$ tend vers une limite, le plan $\mathfrak{X}$ tend vers la même limite, mais la réciproque n'est pas vraie.

33. ***Position par rapport à un plan tangent en M des arcs qui aboutissent en M.*** — 1° **Point ordinaire.** — Supposons, ce qui est le cas général, que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ puissent être pris pour base de l'espace vectoriel des vecteurs libres de l'espace géométrique $\mathcal{E}_3$; les vecteurs équipollents d'origine M, $\overrightarrow{MV_1}$, $\overrightarrow{MV_2}$, $\overrightarrow{MV_3}$, sont portés par les arêtes d'un trièdre.

On dit alors que M est un point ordinaire de Γ.

La formule de Taylor vectorielle donne

$$(1) \qquad \overrightarrow{MM_1} = \omega\vec{v}_1 + \frac{\omega^2}{2}\vec{v}_2 + \frac{\omega^3}{6}\left(\vec{v}_3 + \vec{\varepsilon}\right), \qquad \lim_{\omega \to 0} \vec{\varepsilon} = \vec{0}.$$

On peut en déduire une expression des coordonnées de M_1 dans le repère $\left(M, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right)$.

Il existe trois fonctions réelles $\varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_2(\omega)$, $\varepsilon_3(\omega)$ telles que

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_1\vec{v}_1 + \varepsilon_2\vec{v}_2 + \varepsilon_3\vec{v}_3,$$

ε_1, ε_2, ε_3 ayant pour limite 0 lorsque ω tend vers 0.

Alors la formule (1) donne

$$(2) \qquad \overrightarrow{MM_1} = \xi\vec{v}_1 + \eta\vec{v}_2 + \zeta\vec{v}_3 \qquad \begin{cases} \xi = \omega + \varepsilon_1\dfrac{\omega^3}{6} & \lim\limits_{\omega \to 0} \varepsilon_1 = 0 \\ \eta = \dfrac{\omega^2}{2} + \varepsilon_2\dfrac{\omega^3}{6} & \lim\limits_{\omega \to 0} \varepsilon_2 = 0 \\ \zeta = \dfrac{\omega^3}{6} + \varepsilon_3\dfrac{\omega^3}{6} & \lim\limits_{\omega \to 0} \varepsilon_3 = 0 \end{cases}$$

En d'autres termes, ξ, η, ξ sont respectivement équivalents à ω, $\frac{\omega^2}{2}$, $\frac{\omega^3}{6}$ lorsque ω tend vers 0.

Il en résulte (II, 48, 3°; voir aussi le n° 16, 1°) qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$0 < |\omega| < \alpha \implies \begin{cases} \operatorname{sgn}\xi = \operatorname{sgn}\omega \\ \eta > 0 \\ \operatorname{sgn}\zeta = \operatorname{sgn}\omega. \end{cases}$$

I. *Position par rapport à un plan tangent non osculateur.* — Soit Π un plan contenant $\overrightarrow{MV_1}$; son équation dans le repère $(M, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est

$$\mu Y + \nu Z = 0.$$

Si Π n'est pas osculateur, $\mu \neq 0$.

La puissance analytique de M_1 par rapport à Π a pour partie principale $\mu\frac{\omega^2}{2}$, elle a donc, pour $|\omega| < \alpha$, le signe de la puissance analytique de l'extrémité (0, 1, 0) du vecteur $\overrightarrow{MV_2}$.

En résumé :

THÉORÈME. — **Les deux arcs qui aboutissent en un point ordinaire M d'une courbe gauche Γ sont, par rapport à un plan tangent non osculateur, du même côté que le vecteur** $\overrightarrow{MV_2} = \frac{d^2\overrightarrow{M}}{du^2}$.

On énonce encore ce résultat en disant que le vecteur $\overrightarrow{MV_2}$ **est dirigé vers la concavité de la courbe Γ en M.**

II. *Position par rapport au plan osculateur* $\mathcal{R}$. — Dans le repère considéré, le plan osculateur $\mathcal{R}$ est le plan XOY;

$$0 < \omega < \alpha \implies M_1 \text{ et } V_3 \text{ sont du même côté de } \mathcal{R}.$$
$$-\alpha < \omega < 0 \implies M_1 \text{ et } V_3 \text{ sont de part et d'autre de } \mathcal{R}.$$

En résumé :

THÉORÈME. — **Les deux arcs qui aboutissent en un point ordinaire M d'une courbe gauche Γ sont de part et d'autre du plan osculateur en M.**

On dit encore que Γ **traverse en M son plan osculateur.**

2° **Cas particuliers.** — Reprenons les notations du n° 32, 1° et introduisons la première des dérivées successives du vecteur-espace au point M, d'ordre supérieur à q, qui ne soit pas nulle, ni coplanaire avec v_p et $\vec{v_q}$; appelons-la $\vec{v_r}$.

$\vec{v_p}, \vec{v_q}, \vec{v_r}$ **forment une base pour l'espace vectoriel des vecteurs libres de l'espace géométrique** $\mathcal{E}_3$; **les vecteurs équipollents** $\overrightarrow{MV_p}, \overrightarrow{MV_q}, \overrightarrow{MV_r}$ **d'origine M sont portés par les arêtes d'un trièdre.**

La formule de Taylor vectorielle donne

$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{\omega^p}{p!}(1+h)\vec{v_p} + \frac{\omega^q}{q!}(1+h')\vec{v_q} + \frac{\omega^r}{r!}(\vec{v_r} + \vec{\varepsilon}),$$

$h, h', \vec{\varepsilon}$ **admettant les limites 0, 0,** $\vec{0}$ **lorsque** ω **tend vers 0.**

Dans le repère $(M, \vec{v_p}, \vec{v_q}, \vec{v_r})$, le point M_1

est tel que $$\overrightarrow{MM_1} = \xi\vec{v_p} + \eta\vec{v_q} + \zeta\vec{v_r}$$

$$\xi \sim \frac{\omega^p}{p!}, \qquad \eta \sim \frac{\omega^q}{q!}, \qquad \zeta \sim \frac{\omega^r}{r!}.$$

I. Un plan Π tangent en M, non osculateur a pour équation dans le repère $(M, \vec{v_p}, \vec{v_q}, \vec{v_r})$

$$\mu Y + \nu Z = 0, \qquad \mu \neq 0.$$

La puissance analytique de M_1 a pour partie principale $\mu\frac{\omega^q}{q!}$; et la puissance analytique de l'extrémité (0, 1, 0) du vecteur $\overrightarrow{MV_q}$ est μ; la courbe Γ traverse [resp. ne traverse pas] le plan Π en M si q est impair [resp. si q est pair].

II. Le plan osculateur $\mathcal{R}$, dans le repère considéré est le plan XOY.

La courbe Γ traverse [resp. ne traverse pas] le plan osculateur si r est impair [resp. si r est pair].

3° **Exemples.** — I. $p = 1, \quad q = 2, \quad r = 4.$

Le plan osculateur $\mathcal{R}$ est le plan V_1MV_2; $\overrightarrow{MV_2}$ est nul où situé dans $\mathcal{R}$; Γ ne traverse pas $\mathcal{R}$.

II. $p = 1, \quad q = 3, \quad r = 4.$

$\overrightarrow{MV_3}$ est nul ou colinéaire avec $\overrightarrow{MV_1}$; le plan osculateur $\mathcal{R}$ est le plan V_1MV_2; Γ traverse en M tout plan tangent non osculateur; Γ ne traverse pas le plan osculateur.

Par analogie avec le cas du plan, un point pour lequel $p = 1$, $q > 3$ peut s'appeler point d'inflexion analytique.

III. $p = 2, \quad q = 3, \quad r = 4.$

M est un point de rebroussement; Γ traverse en M tout plan tangent non osculateur, mais Γ ne traverse pas le plan osculateur V_2MV_3.

II. PROBLÈMES DIVERS SUR LES COURBES GAUCHES REPRÉSENTÉES PARAMÉTRIQUEMENT

34. ***Plans coupant une courbe gauche en plusieurs points confondus.*** — 1° Les points communs à la courbe Γ représentée par

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u) \iff x = f(u), \qquad y = g(u), \qquad z = h(u)$$

et au plan Π d'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

correspondent aux valeurs du paramètre qui sont racines de l'équation sur R

(1) $\mathcal{F}(u) = 0, \qquad$ avec $\qquad \mathcal{F}(u) = Af(u) + Bg(u) + Ch(u) + D.$

Si, comme on le suppose, Γ est un arc simple continu, ou une succession d'arcs simples continus, à chaque racine de (1) correspond un point commun à Γ et Π, et à deux racines distinctes correspondent deux points communs distincts, sauf si Π passe par un point multiple d'ordre p : l'équation (1) admet comme racines les p valeurs de u associées à ce point.

En supposant que $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ admettent des dérivées successives, il en est de même pour la fonction $\mathcal{F}(u)$ et l'on sait alors définir l'ordre de chaque racine de l'équation (1) (II, n° 126).

u_0 étant une racine de (1), nous poserons, pour simplifier

$$\begin{array}{ll} f(u_0) = f_0 & f^{(p)}(u_0) = f_0^{(p)} \\ g(u_0) = g_0 & g^{(p)}(u_0) = g_0^{(p)} \\ h(u_0) = h_0 & h^{(p)}(u_0) = h_0^{(p)}. \end{array}$$

Soit u_0 une racine de l'équation (1), donnant le point M_0 de Γ; les coordonnées en sont f_0, g_0, h_0 et l'on peut écrire la fonction $\mathcal{F}$ sous la forme

$$(2) \qquad \mathcal{F}(u) = A[f(u) - f_0] + B[g(u) - g_0] + C[h(u) - h_0]$$

où l'on voit immédiatement $\mathcal{F}(u_0) = 0$.

En opérant comme au n° 30, nous montrerions que l'ordre de multiplicité m de la racine u_0 de (2) ne dépend pas du choix du paramétrage admissible; il s'agit du naturel m tel que la direction $\vec{\Pi}$ du plan II contient le sous-espace fondamental $\mathcal{V}_{m-1}$, sans contenir $\mathcal{V}_m$. Voici maintenant une étude directe des cas les plus simples.

Pour interpréter les racines multiples éventuelles de l'équation (1), limitons-nous, comme au n° 30, au cas où Γ est le support d'un arc géométrique simple de classe C^k.

2° **Plans coupant Γ en deux points au moins confondus.**

u_0 est d'ordre au moins égal à 2 si, et seulement si,

$$\mathcal{F}'(u_0) = 0 \iff Af_0' + Bg_0' + Ch_0' = 0. \qquad (3)$$

Si M_0 n'est pas stationnaire, (3) exprime que II contient la direction du vecteur $\vec{v}_1(f_0', g_0', h_0')$ qui dirige la tangente en M_0 : II est un plan tangent en M_0.

Si M_0 est stationnaire, (3) est vérifiée quels que soient A, B, C.

On retiendra :

Exprimer qu'un plan II *coupe* Γ *en deux points au moins confondus avec un point* M *non stationnaire, c'est exprimer que* II *est tangent en* M.

APPLICATION. — Pour trouver l'équation tangentielle d'une courbe de l'espace Γ, c'est-à-dire une condition nécessaire et suffisante pour que le plan II donné par ses coordonnées tangentielles A, B, C, D soit tangent à Γ, on écrit que l'équation (1) admet une racine double en u.

Par exemple soit Γ donnée par

$$y = x^2 + x \qquad z = -x^2 + 2x$$

(nous verrons au n° 34 que Γ est une conique).

Le plan II la coupe aux points dont les abscisses vérifient

$$x^2(B - C) + x(A + B + 2C) + D = 0,$$

d'où l'équation tangentielle

$$(A + B + 2C)^2 - 4D(B - C) = 0.$$

3° Plans coupant Γ en 3 points au moins confondus.

u_0 est d'ordre au moins égal à 3 si, et seulement si,

$$\begin{cases} \mathcal{F}'(u_0) = 0 \iff Af'_0 + Bg'_0 + Ch'_0 = 0 & (3) \\ \mathcal{F}''(u_0) = 0 \iff Af''_0 + Bg''_0 + Ch''_0 = 0. & (4) \end{cases}$$

Soit $$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} f'_0 & g'_0 & h'_0 \\ f''_0 & g''_0 & h''_0 \end{bmatrix}$$

a) Si $\mathcal{D}$ est de rang 2, les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}(f''_0, g''_0, h''_0)$ en M_0 ne sont ni nuls, ni coplanaires; les relations (3) et (4) expriment que Π contient les directions de ces vecteurs : Π est le plan osculateur en M_0 à Γ.

b) Supposons $\mathcal{D}$ de rang 1.

I. Si $\vec{v_1} \neq \vec{0}$, ou bien $\vec{v_2} = \vec{0}$, ou bien $\vec{v_2}$ est colinéaire avec $\vec{v_1}$, M est un point d'inflexion. Tout plan tangent en M_0 coupe Γ en 3 points au moins confondus avec M_0.

II. Si $\vec{v_1} = \vec{0}$, $\vec{v_2} \neq \vec{0}$, M_0 est stationnaire, et tout plan tangent en M_0 coupe Γ en 3 points au moins confondus avec M_0.

c) Supposons $\mathcal{D} = [0]$; $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont nuls; tout plan passant par M_0 coupe Γ en 3 points au moins confondus avec M_0.

On retiendra :

Exprimer qu'un plan Π *coupe* Γ *en trois points au moins confondus avec un point* M *non stationnaire, c'est exprimer que* Π *est le plan osculateur en* M *à* Γ, (ou exceptionnellement que Π est un plan tangent en un point d'inflexion analytique).

4° Plans coupant Γ en 4 points au moins confondus.

u_0 est d'ordre au moins égal à 4 si, et seulement si

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}'(u_0) &= 0 \\ \mathcal{F}''(u_0) &= 0 \\ \mathcal{F}'''(u_0) &= 0 \end{aligned}\right\} \iff \begin{cases} Af'_0 + Bg'_0 + Ch'_0 = 0 & (3) \\ Af''_0 + Bg''_0 + Ch''_0 = 0 & (4) \\ Af'''_0 + Bg'''_0 + Ch'''_0 = 0. & (5) \end{cases}$$

Soit $$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} f'_0 & g'_0 & h'_0 \\ f''_0 & g''_0 & h''_0 \\ f'''_0 & g'''_0 & h'''_0 \end{bmatrix}$$

a) Si $\det \mathcal{D} \neq 0$, $\mathcal{D}$ est de rang 3; le système [(3), (4), (5)] n'admet que la solution triviale. Les vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ (f'''_0, g'''_0, h'''_0) forment un trièdre, M_0 est un

point ordinaire; en un point ordinaire, aucun plan ne coupe Γ en 4 points confondus.

b) Si dét $\mathfrak{D} = 0$, mais si $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ définissent le plan osculateur en M_0, ce plan coupe Γ en 4 points au moins confondus avec M_0; c'est le cas où $\vec{v}_3 = \vec{0}$, ou bien $\vec{v}_3$ coplanaire avec $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. Avec les notations du n° 33, 2° partie c'est le cas où $p = 1$, $q = 2$, $r \geqslant 4$: on dit alors que le plan osculateur en M_0 est statlonnaire.

5° Par analogie avec le n° 30, 4° l'étude précédente pourrait être reprise en coordonnées homogènes.

35. ***Courbes gauches unicursales.*** — 1° Les généralltés du n° 26 s'applIquent aux courbes gauches unlcursales. La représentation rationnelle d'une telle courbe Γ se met sous la forme

$$x = \frac{f(u)}{\varphi(u)}, \qquad y = \frac{g(u)}{\psi(u)}, \qquad z = \frac{h(u)}{\theta(u)},$$

f, g, h, φ, ψ, θ étant des polynômes sur le corps des réels, premiers entre eux dans leur ensemble.

Nous supposerons la représentation propre.

En réduisant les fractions rationnelles au même dénominateur, on peut obtenir une représentation rationnelle homogène de la courbe Γ sous la forme

$$X = F(u), \quad Y = G(u), \quad Z = H(u), \quad T = K(u),$$

F, G, H, K étant quatre polynômes sur le corps des réels, premiers entre eux dans leur ensemble.

2° **Exemples.** — *a*) Toute droite est une courbe unlcursale, et inversement

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \\ a''' & b''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{A} \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix}$$

représente une droite sl la matrice $\mathfrak{A}$ est de rang 2.

b) La courbe Γ représentée par

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{A} \begin{bmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

où $\mathfrak{A}$ est une matrice de rang 3 est une courbe plane.

Posons en effet $\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{bmatrix}$ $\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} a \\ a' \\ a'' \\ a''' \end{bmatrix}$ $\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} b \\ b' \\ b'' \\ b''' \end{bmatrix}$ $\mathfrak{C} = \begin{bmatrix} c \\ c' \\ c'' \\ c''' \end{bmatrix}$

$\mathcal{M}$ appartient à la varlété linéalre définie par

$$\lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{B} + \nu\mathcal{C} \qquad \text{avec} \qquad \lambda = u^3, \quad \mu = u, \quad \nu = 1.$$

M reste donc dans le plan des 3 points A, B, C associés respectivement à $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

c) Une courbe unicursale *gauche* ne sera donc obtenue que si l'un au molns des polynômes F, G, H, K est de degré au moins égal à 3.

Soit Γ la courbe déterminée par

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{A} \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{A}$ est régullère sans quoi la courbe Γ serait plane.

Soit $$\mathfrak{L} = [A \quad B \quad C \quad D]$$

la matrice ligne associée au plan P

$$AX + BY + CZ + DT = 0.$$

L'équation aux u des points communs à P et Γ est

$$\mathfrak{L}\mathcal{A} \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} = [0]. \tag{1}$$

Si nous nous plaçons dans l'espace $\mathcal{E}_3$ complexifié de $\mathcal{E}_3$, et si nous convenons que le paramètre u est un nombre complexe, la courbe Γ est alors coupée en trois points par tout plan de $\mathcal{E}_3$; nous dirons que Γ est une cubique gauche.

3° Exemple d'étude d'une courbe unicursale. *a*) Reprenons la cubique Γ donnée au 2°, et cherchons le plan contenant trois points donnés $M_1(u_1)$, $M_2(u_2)$, $M_3(u_3)$ de Γ; appelant s_1, s_2, s_3 les fonctions symétriques fondamentales de u_1, u_2, u_3 (I, n° 129), l'équation ayant pour racines u_1, u_2, u_3 peut s'écrire

$$[1 \quad -s_1 \quad s_2 \quad -s_3] \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} = [0],$$

et par suite

$$[1 \quad -s_1 \quad s_2 \quad -s_3] = \mathfrak{L}\mathcal{A}$$

d'où l'on dédult

$$\mathfrak{L} = [1 \quad -s_1 \quad s_2 \quad -s_3]\,\mathcal{A}^{-1}. \tag{2}$$

b) Si dans la formule (2) on donne à u_1, u_2, u_3 la même valeur u, on obtient le plan qui coupe Γ en 3 points confondus avec le point $M(u)$, donc le plan osculateur R en M à Γ; la matrice-ligne associée est

$$\mathfrak{R} = [1 \quad -3u \quad 3u^2 \quad -u^3]\,\mathcal{A}^{-1}. \tag{3}$$

et l'équation de R peut s'écrire $\mathfrak{R}.\mathcal{M} = [0]$.

c) Par un point quelconque M_0, dont la matrice associée est

$$\mathcal{M}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{bmatrix}$$

passent 3 plans osculateurs à Γ; les points de contact ont pour paramètres les racines de l'équation

(4) $$[1 \quad -3u \quad 3u^2 \quad -u^3]\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{M}_0 = [0].$$

On peut chercher le plan P* contenant ces 3 points en mettant l'équation (4) sous la forme (1).

En transposant, on obtient d'abord

(4') $$\mathfrak{M}_0\mathfrak{A}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -3u \\ 3u^2 \\ -u^3 \end{bmatrix} = [0];$$

d'autre part, il existe une matrice ω telle que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3u \\ 3u^2 \\ -u^3 \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{c'est } \omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement $$\mathfrak{P}^*\mathfrak{A} = \mathfrak{M}_0\mathfrak{A}^{-1}\omega$$

(5) et $$\mathfrak{P}^* = \mathfrak{M}_0\mathfrak{A}^{-1}\omega\mathfrak{A}^{-1}.$$

Vérifions que le plan P* contient M_0; formons donc la matrice

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{P}^*\mathfrak{M}_0 \quad \text{ou} \quad \mathfrak{M}_0\mathfrak{A}^{-1}\omega\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{M}_0;$$
$$\tilde{\mathfrak{C}} = \mathfrak{M}_0\mathfrak{A}^{-1}\tilde{\omega}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{M}_0$$

or $\tilde{\omega} = -\omega$, et par suite $\tilde{\mathfrak{C}} = -\mathfrak{C}$; comme $\mathfrak{C}$ est une matrice d'un seul élément, celui-ci est nul, et finalement

$$\mathfrak{P}^*\mathfrak{M}_0 = [0],$$

ce que nous voulions démontrer

d) Le lecteur pourra appliquer les calculs précédents à la cubique représentée par

(6) $$x = \frac{u}{u-1}, \qquad y = \frac{u^2}{u-1}, \qquad z = \frac{u^3}{u-1}.$$

Il pourra aussi utiliser l'équation aux u des points communs avec le plan P mise sous la forme

$$Au + Bu^2 + Cu^3 + D(u-1) = 0$$

ou (7) $$Cu^3 + Bu^2 + (A+D)u - D = 0.$$

Un calcul de fonctions symétriques donne l'équation du plan $M_1 M_2 M_3$

(8) $$(s_2 - s_3)x - s_1 y + z + s_3 = 0.$$

Le plan osculateur en $M(u)$ a pour équation

(9) $$(3u^2 - u^3)x - 3uy + z + u^3 = 0.$$

Les plans osculateurs passant par un point donné $M_0(x_0, y_0\ z_0)$ ont leurs points de contact qui vérifient l'équation

(10) $$u^3(x_0 - 1) - 3x_0u^2 + 3y_0u - z_0 = 0.$$

En exprimant que les équations (7) et (10) sont les mêmes, on obtient l'équation du plan P qui contient les 3 points de contact :

$$(3y_0 - z_0)x - 3x_0y + (x_0 - 1)z + z_0 = 0;$$

en l'écrivant

$$3(y_0x - x_0y) + (x_0z - z_0x) - (z - z_0) = 0;$$

on met en évidence que ce plan contient M_0.

Dans l'équation (8), imaginons que u_1 et u_2 sont fixes et soit

$$u_1 + u_2 = \lambda, \qquad u_1u_2 = \mu.$$

L'équation (8), ordonnée par rapport à u_3 s'écrit

$$(\mu x - \lambda y + z) + u_3 [(\lambda - \mu)\, x - y + \mu] = 0.$$

On trouve l'équation générale des plans d'un faisceau linéaire ayant précisément pour arête la corde M_1M_2 de Γ. Des équations cartésiennes de cette corde sont donc

$$\begin{cases} \mu x - \lambda y + z = 0 \\ (\lambda - \mu)x - y + \mu = 0. \end{cases}$$

En faisant $u_1 = u_2 = u$, on obtient des équations cartésiennes de la tangente en M (u) :

$$\begin{cases} u^2x - 2uy + z = 0 \\ (2u - u^2)\, x - y + u^2 = 0. \end{cases}$$

36. *Branches infinies d'une courbe gauche.* — 1° Les généralités étudiées au n° 19 s'appliquent à une courbe gauche.

EXEMPLE. — Reprenons la courbe Γ

$$x = \frac{u}{u-1}, \qquad y = \frac{u^2}{u-1}, \qquad z = \frac{u^3}{u-1}$$

déjà étudiée au n° 35, 3°, *d*, et étudions ses branches infinies.

a) Si u tend vers 1, x, y, z deviennent infinis. La droite OM a pour paramètres directeurs 1, u, u^2, donc la droite OΔ de paramètres directeurs 1, 1, 1 fournit une direction asymptotique de Γ.

La parallèle menée par M(u) à OΔ est représentée paramétriquement par

$$X = x + \rho, \qquad Y = y + \rho, \qquad Z = z + \rho.$$

Sa trace μ sur le plan xOy correspond à $\rho = -z$ et a pour coordonnées

$$\xi = x - z = -u(1 + u) \qquad \eta = y - z = -u^2.$$

Le point μ a pour limite le point $(-2, -1)$; l'asymptote A est représentée par

$$X + 2 = Y + 1 = Z.$$

Le plan osculateur au point α à l'infini sur A peut s'obtenir directement : le plan (A, M) a pour équation

$$(X - Z + 2) + \lambda (Y - Z + 1) = 0$$

avec $\lambda = -\dfrac{x - z + 2}{y - z + 1}$, c'est-à-dire $\lambda = -\dfrac{u + 2}{u + 1}$;

quand u tend vers 1, λ a pour limite $-\dfrac{3}{2}$, d'où le plan cherché

$$2X - 3Y + Z + 1 = 0.$$

On vérifie que cette équation est celle que fournit l'équation générale du plan osculateur obtenue au n° 35 (équation (9)) lorsque $u = 1$.

b) Si u devient infini, on prend comme paramètres directeurs de OM les nombres $\frac{1}{u^3}, \frac{1}{u}, 1$; on trouve ainsi que Γ admet Oz pour direction asymptotique; la parallèle à Oz, $X = x$, $Y = y$ s'éloigne indéfiniment dans la direction de plan zOy, et au point β à l'infini sur Oz, Γ admet pour tangente la droite à l'infini du plan y Oz; la branche infinie de Γ est parabolique.

D'ailleurs en écrivant

$$\begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{u-1} \\ y = u + 1 + \dfrac{1}{u-1} \\ z = u^2 + u + 1 + \dfrac{1}{u-1} \end{cases} \qquad \text{on constate que la parabole } \mathcal{K} \qquad \begin{cases} \xi = 1 \\ \eta = u + 1 \\ \zeta = u^2 + u + 1 \end{cases}$$

est une parabole asymptote pour Γ, la distance de deux points de même paramètre u, sur Γ et sur $\mathcal{K}$ ayant pour limite 0 lorsque u devient infini.

Le plan contenant la tangente en β et le point $M(u)$ de Γ est le plan $X = \frac{u}{u-1}$; lorsque u devient infini, ce plan a pour limite le plan $X = 1$ de la parabole K; ce plan est osculateur à Γ au point β à l'infini.

2° Plan asymptote. — Un plan P est dit plan asymptote à une courbe gauche Γ si le plan parallèle à P mené par un point M de Γ a pour position limite P lorsque M s'éloigne indéfiniment sur Γ.

a) Si Γ admet une asymptote A, tout plan contenant A est asymptote de Γ; A étant la tangente à Γ un point α à l'infini sur A, un plan asymptote est alors un plan tangent à Γ en α.

b) L'exemple précédent (1°, *b*) montre qu'une courbe Γ peut admettre un plan asymptote sans admettre d'asymptote : le plan $X = 1$ est plan asymptote de Γ lorsque u devient infini, alors que la branche infinie associée est parabolique.

III. COURBES PLANES OU GAUCHES SATISFAISANT A DES PROPRIÉTÉS SIMPLES

Nous considérons dans ce sous-chapitre un arc simple continu dérivable Γ défini par

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u), \qquad u \in [a, b].$$

Les coordonnées de $M(u) \in \Gamma$ sont $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, les fonctions f, g, h étant dérivables.

Nous poserons

$$\vec{F}(u_0) = \overrightarrow{OM_0}, \quad u_0 \in [a, b].$$

37. *Propriétés relatives au vecteur* $\frac{\overrightarrow{dM}}{du}$.

1° *Supposons* $\frac{\overrightarrow{dM}}{du} = 0, \quad \forall u \in [a, b].$

Cette hypothèse entraîne (n° 6, 2°).

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0}$$

Il n'existe pas d'arc Γ *dont tous les points soient stationnaires.*

2° *Supposons* $\frac{\overrightarrow{dM}}{du}$ *parallèle à une direction donnée* Δ, $\forall u \in [a, b]$. Projetons M en m, parallèlement à Δ, sur un plan H; $\frac{\overrightarrow{dm}}{du} = \overrightarrow{0}, \forall u \in [a, b]$; donc m coïncide avec m_0, projection de M_0; Γ est un segment de la parallèle à Δ menée par m_0.

Si les tangentes à Γ *sont parallèles à une droite* Δ, Γ *est un segment de droite parallèle à* Δ.

3° *Supposons* $\frac{\overrightarrow{dM}}{du}$ *parallèle à une direction de plan* Π, $\forall u \in [a, b]$. Projetons M en m, parallèlement à Π, sur une droite D; $\frac{\overrightarrow{dm}}{du} = \overrightarrow{0}, \forall u \in [a, b]$, donc m coïncide avec m_0, projection de M_0; Γ est situé dans le plan parallèle à Π, mené par m_0.

Si les tangentes à Γ *sont parallèles à un plan* Π, Γ *est un arc situé dans un plan parallèle à* Π.

4° *Supposons* $\frac{\overrightarrow{dM}}{du}$ *colinéaire à* $\overrightarrow{OM}$, $\forall u \in [a, b]$. Nous supposons que Γ ne contient pas l'origine O; en particulier $M_0 \neq O$. Prenons OM_0 pour support du premier vecteur, $\vec{i}$, du repère; soit L le point de OM situé dans le plan $x = 1$;

$$\overrightarrow{OL} = \vec{l}(u), \qquad \vec{l}(u_0) = \vec{i}.$$
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{l}(u), \qquad \overrightarrow{OM_0} = x_0\vec{i}.$$
$$\frac{\overrightarrow{dM}}{du} = \frac{dx}{du}\vec{l}(u) + x.\frac{d\vec{l}}{du}$$

ne peut être colinéaire à $\vec{l}(u)$, quel que soit u, que si $\frac{d\vec{l}}{du} = \vec{0}$, sinon $\frac{d\vec{l}}{du}$ est un vecteur parallèle au plan $(\vec{j}, \vec{k})$ du repère. Donc $\vec{l}(u) = \vec{l}(u_0)$, c'est-à-dire

$$\vec{l}(u) = \vec{i} \qquad \forall u \in [a,b].$$

Dès lors $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$, et M se trouve sur OM_0.

Si les tangentes à Γ *passent par un point fixe* O, Γ *est un segment de droite dont le support passe par* O.

REMARQUE. — L'énoncé précédent n'est valable que si Γ ne contient pas O. Si l'on ne tient pas compte de cette restriction, une courbe continue dérivable (sauf en O) peut être formée de segments de droite d'origine O.

5° D *étant une droite fixe, supposons* $\frac{d\vec{M}}{du}$ *parallèle au plan* (D, M), $\forall u \in [a, b]$.

Nous supposons en outre qu'aucun point de l'arc Γ n'appartient à D; en particulier M_0 n'est pas sur D.

Projetons Γ parallèlement à D sur un plan H; soit m la projection de M, O la trace de D sur H; l'hypothèse entraine que $\frac{d\vec{m}}{du}$ est colinéaire à $\overrightarrow{Om}$, m décrit donc un segment de droite porté par Om_0, m_0 étant la projection de M_0.

Si les tangentes à Γ *s'apputent sur une droite fixe* D, Γ *est un arc situé dans un plan contenant* D.

REMARQUE. — L'énoncé précédent n'est valable que si Γ ne rencontre pas D. Si on ne tient pas compte de cette restriction, une courbe continue dérivable (sauf aux points situés sur D) peut être formée d'arcs plans situés dans des plans contenant D.

38. ***Propriétés relatives au vecteur*** $\frac{d^2\vec{M}}{du^2}$. — Nous supposons, dans ce paragraphe que le vecteur espace $\overrightarrow{OM}$ admet une dérivée seconde, notée $\vec{F}''(u)$ ou $\frac{d^2\vec{M}}{du^2}$. Nous introduirons l'indicatrice Λ du vecteur $\frac{d\vec{M}}{du}$ et le point L défini par

$$\overrightarrow{OL} = \frac{d\vec{M}}{du}; \qquad \frac{d\vec{L}}{du} = \frac{d^2\vec{M}}{du^2}.$$

1° *Supposons* $\frac{d^2\vec{M}}{du^2} = \vec{0}, \quad \forall u \in [a, b]$.

$\frac{d\vec{L}}{du} = \vec{0}$, donc L coïncide avec la position L_0 obtenue pour u_0 : $\overrightarrow{OL_0} = \vec{F}'(u_0)$.

α) Si $L_0 \neq O$ $\qquad \frac{d\vec{M}}{du} = \overrightarrow{OL_0}$

d'où $\qquad \overrightarrow{OM} = u.\overrightarrow{OL_0} + \overrightarrow{OM_0}$.

Γ est un segment de droite.

β) Si L_0 coïncide avec O, $\qquad \frac{d\vec{M}}{du} = \vec{0}$

M coïncide avec M_0.

2° *Supposons* $\frac{d^2\vec{M}}{du^2}$ *colinéaire à* $\frac{d\vec{M}}{du}$, $\forall u \in [a, b]$.

$\frac{d\vec{L}}{du}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OL}$, c'est donc que Λ est un segment de droite contenant O, le vecteur $\frac{d\vec{M}}{du}$ reste parallèle au vecteur $\overrightarrow{OL_0}$, ($L_0 \neq O$), et Γ est un segment de droite.

On résume 1° et 2°, en énonçant : *La seule courbe dont tous les points soient des points d'inflexion analytique est la droite.*

REMARQUE. — Si l'on suppose que Γ puisse avoir des points stationnaires (L coïncide alors avec O), Γ peut être formée d'un certain nombre de segments de droite.

3° *On suppose que* $\frac{d\vec{M}}{du}$ *et* $\frac{d^2\vec{M}}{du^2}$ *sont coplanaires avec une direction fixe* Δ, $\forall u \in [a, b]$.

On suppose qu'en aucun point de Γ la tangente ne soit parallèle à Δ.

Projetons Γ en γ sur un plan H, parallèlement à la direction Δ; soit m la projection de M; $\frac{d\vec{m}}{du}$ et $\frac{d^2\vec{m}}{du^2}$ étant colinéaires, γ est un segment de droite, et Γ est ainsi situé dans un plan parallèle à Δ.

Si tous les plans osculateurs de Γ *sont parallèles à la direction fixe* Δ, Γ *est un arc plan, situé dans un plan parallèle à* Δ.

REMARQUE. — Si l'on suppose qu'en certains points de Γ existe une tangente parallèle à Δ, Γ peut être formée d'un certain nombre d'arcs plans situés dans des plans parallèles à Δ.

4° *On suppose que* $\overrightarrow{OM}$, $\frac{d\vec{M}}{du}$, $\frac{d^2\vec{M}}{du^2}$ *soient coplanaires*, $\forall u \in [a, b]$.

On suppose en outre qu'en aucun point de Γ, la tangente ne passe par O.

Dans ces conditions $\frac{d^2\vec{M}}{du^2}$ peut se décomposer en deux vecteurs portés par $\frac{d\vec{M}}{du}$ et $\overrightarrow{OM}$: il existe deux scalaires $\rho(u)$, $\sigma(u)$ tels que

$$\frac{d^2\vec{M}}{du^2} = \rho\frac{d\vec{M}}{du} + \sigma.\overrightarrow{OM}.$$

Les coordonnées f, g, h de M sont telles que

$$\begin{cases} f'' = \rho f' + \sigma f \\ g'' = \rho g' + \sigma g \\ h'' = \rho h' + \sigma h. \end{cases}$$

f, g, h sont ainsi trois solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre, homogène. Si f et g ne sont pas dans un rapport constant, il

existe (II, n° 249, 3°) deux constantes λ et μ telles que

$$h(u) = \lambda f(u) + \mu g(u), \qquad \forall\, u \in [a, b]$$

c'est donc que le point M reste dans le plan qui a pour équation,

$$Z = \lambda X + \mu Y.$$

Si les plans osculateurs à Γ *passent par un point* O, Γ *est un arc plan situé dans un plan contenant* O.

Remarque. — Si on suppose qu'en certains points de Γ existe une tangente passant par O, Γ peut être formé d'arcs plans situés tous dans des plans contenant le point O.

EXERCICES

1. — La courbe représentée par

$$x = t^3, \qquad y = t^4 - t, \qquad z = t^4 + \lambda t^3 + \mu t^2$$

peut-elle admettre un point double?

2. — Former l'équation du plan osculateur en M (θ) à la courbe représentée en coordonnées cylindriques par les équations

$$z = r = e^{m\theta}.$$

3. — La courbe Γ est représentée par les équations

$$x = e^t, \qquad y = e^{-t}, \qquad z = t\sqrt{2};$$

trouver ceux des plans osculateurs à Γ qui passent par un point donné.

4. — Déterminer le plan osculateur à la courbe Γ d'équations

$$x^2 + y^2 = \mathrm{ch}^2 z \quad \text{et} \quad x - 1 = y - z^2$$

au point A de coordonnées (1, 0, 0).

5. — Une courbe Γ est définie par la représentation paramétrique

$$x = u^4, \qquad y = u^3, \qquad z = u.$$

Quelles relations doivent lier u_1, u_2, u_3 pour que les points $M_1(u_1)$, $M_2(u_2)$, $M_3(u_3)$ de Γ soient situés sur une droite D. Trouver le lieu des droites qui s'appuient en trois points sur Γ.

6. — Reprendre la question précédente pour la courbe

$$x = \frac{2u}{u^4 + 1}, \qquad y = \frac{u(u^2 + 1)}{u^4 + 1}, \qquad z = \frac{u^3 - u + 2}{u^4 + 1}.$$

7. — Soit C la courbe définie dans un repère orthonormé par les équations

$$x = a\frac{\cos\varphi}{\mathrm{sh}\,\varphi}, \qquad y = a\frac{\sin\varphi}{\mathrm{sh}\,\varphi}, \qquad z = a\frac{\mathrm{ch}\,\varphi}{\mathrm{sh}\,\varphi}, \qquad (a > 0)$$

dans lesquelles φ est un paramètre. Trouver l'asymptote de cette courbe. Vérifier que la tangente à C en M (φ) touche la sphère S (O, a) en un point P. Quel est le lieu Γ de ce point? Vérifier que le plan osculateur en M à C est tangent à S en P et que la tangente en P à Γ est perpendiculaire à PM et tangente à la surface H engendrée par C en tournant autour de Oz. Le plan osculateur en P à Γ touche H en M', trouver le lieu de ce point.

8. — Soit C la courbe définie paramétriquement dans un repère orthonormé par

$$x = u^3, \qquad y = u^2, \qquad z = u.$$

a) Former les équations de la droite joignant M_1 (u_1), à M_2 (u_2) et trouver celle de ces droites qui passe par un point donné. Former aussi l'équation du plan $M_1M_2M_3$, celle de la sphère $M_1M_2M_3M_4$ et celles du cercle $M_1M_2M_3$.

b) Quelles relations doivent lier u_1, u_2, u_3 pour qu'il existe une sphère Σ tangente à C en M_1, M_2 et M_3? Trouver le lieu du centre de Σ et celui du cercle passant par les points de contact. Par un point quelconque P passent deux sphères Σ, où doit être P pour que ces sphères soient confondues?

c) Par un point M de C on peut mener à cette courbe quatre normales autres que celle dont M est le pied, former l'équation de la sphère passant par les pieds de ces quatre normales; cette sphère rencontre C en deux autres points P et Q, former les équations de la droite PQ.

Quels sont les points de l'espace pour lesquels deux des normales menées de ces points sont confondues? Trouver le lieu des cordes vues de l'origine sous un angle droit.

Un plan variable parallèle à un plan donné coupe C en M_1, M_2, M_3, trouver le lieu du point commun aux médianes du triangle $M_1M_2M_3$.

d) Par A on peut mener trois plans osculateurs à C, leurs points de contact sont dans un plan Π contenant A; quand A décrit une droite D, le plan Π pivote autour d'une droite D'. Il y a réciprocité entre D et D'.

e) Déterminer la sphère qui coupe C en un nombre maximum de points confondus en A (1, 1, 1).

9. — Soit Γ la courbe définie dans un repère orthonormé par

$$x = \frac{t^3}{1+t^2}, \qquad y = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad z = \frac{t}{1+t^2}.$$

a) Trouver les plans osculateurs à Γ passant par un point donné M_0 (t_0) de Γ.

b) Trouver les plans bitangents à Γ.

c) On donne deux points $M_1(t_1)$ et $M_2(t_2)$ de Γ; un plan variable contenant M_1M_2 coupe Γ en deux points variables N_1 et N_2; trouver la surface engendrée par la droite N_1N_2.

10. — Soit Γ la courbe définie dans un repère orthonormé par

$$x = a\frac{1+2\cos^2 u}{\cos u}, \qquad y = a\frac{1+2\sin^2 u}{\sin u}, \qquad z = a\frac{-1}{\sin 2u}.$$

a) Trouver le lieu des points d'intersection des tangentes à Γ et du plan xOy.

b) Les pieds des normales à Γ qui passent par un même point de Oz sont les sommets d'un rectangle.

11*. — Soit Γ la courbe définie dans un repère orthonormé par

$$x = a\cos^2 u \qquad y = a\sin u\cos u \qquad z = a\sin u.$$

a) Trouver le lieu des points d'intersection des tangentes à Γ et du plan xOy.

b) Trouver l'enveloppe des traces des plans normaux à Γ sur le plan d'équation $z = a$.

12. — Lieu des normales à la courbe

$$(\Gamma) \quad a^2x = z^2, \qquad by = z^2 \qquad \text{(repère orthonormé)}$$

qui sont parallèles au plan xOy.

13. — Soit Γ la courbe déterminée paramétriquement, dans un repère orthonormé, par les équations :

$$x = \frac{A}{t-a} \qquad y = \frac{B}{t-b} \qquad z = \frac{C}{t-c}.$$

1° Si un tétraèdre a ses sommets sur Γ et si deux couples d'arêtes opposées sont formés de droites orthogonales, il en est de même du troisième, et l'orthocentre du tétraèdre est sur Γ.

2° Soit Σ une sphère centrée sur Γ; il existe une infinité de tétraèdres inscrits dans Γ et autopolaires par rapport à Σ; les sphères circonscrites à ces tétraèdres passent par deux points fixes de Γ; quel est le lieu des centres de ces sphères?

CHAPITRE V

COURBES PLANES REPRÉSENTÉES PAR UNE ÉQUATION POLAIRE

Nous avons défini les coordonnées polaires dans le plan affine euclidien (III, n° 141), et donné les équations polaires d'une droite, d'un cercle, d'une conique ayant un foyer au pôle (III, n^{os} 142, 143, 144). Nous étudions dans ce chapitre les propriétés infinitésimales des courbes représentées en coordonnées polaires et le tracé de ces courbes.

39. ***Notations.*** — 1° Nous appellerons O le pôle, Ox l'axe polaire, Oy l'axe directement perpendiculaire. M étant un point donné du plan, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est dit vecteur-espace ou *rayon-vecteur* du point M. Nous choisissons sur la droite OM un axe OX, de vecteur unitaire $\vec{u}$.

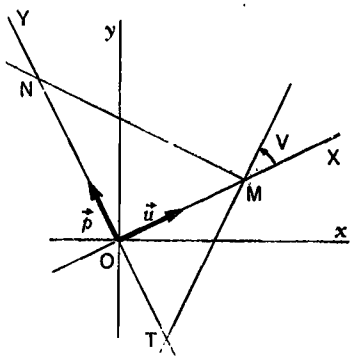


FIG. 36.

$\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX})$ ou $(\overrightarrow{Ox}, \vec{u})$ est un *angle polaire* du point M.

La mesure algébrique de $\overrightarrow{OM}$ à l'aide du vecteur unitaire $\vec{u}$ est appelée *rayon polaire* de M : $r = \overline{OM}$.

M a une double infinité de systèmes de coordonnées polaires

$$\begin{cases} \theta + k.2\pi \\ r \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta + \pi + k.2\pi \\ -r \end{cases}$$

Quand il sera utile de préciser le sens dans lequel $\overrightarrow{OM}$ a été mesuré algébriquement, on écrira

$$r = (\overline{OM})_{\vec{u}} \quad \text{ou} \quad (\overline{OM})_{\theta} \quad \text{ou} \quad (\overline{OM})_{\overrightarrow{OX}}.$$

A l'aide de $\vec{u}$ et de r, on écrit $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$.

L'axe directement perpendiculaire à OX sera noté OY, son vecteur unitaire $\vec{p}$:

$$(\vec{Ox}, \vec{OY}) \quad \text{ou} \quad (\vec{Ox}, \vec{p}) = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

Le repère Ox, Oy peut être dit repère fixe; le repère OX, OY est appelé repère mobile associé au point M.

Rappelons (n° 5, 4°) que $\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{p}$; $\frac{d\vec{p}}{d\theta} = -\vec{u}$.

2° La courbe Γ que nous étudierons sera donnée le plus souvent par une équation polaire

$$r = f(\theta)$$

où f est une fonction définie, continue, dérivable sur un segment $[\alpha, \beta]$. Γ sera une succession d'arcs simples continus, tels qu'il y ait correspondance biunivoque entre chacun de ces arcs simples et un sous-segment de $[\alpha, \beta]$. [cf. n° 10].

Dans les explications théoriques qui vont suivre, c'est θ qui servira de paramètre pour fixer la position de M sur Γ.

I. TANGENTES

40. ***Tangente en un point.*** — 1° **Tangente au pôle.** — Soit θ_0 une valeur telle que $f(\theta_0) = 0$; le point correspondant de Γ coïncide avec le pôle O.

Lorsque θ tend vers θ_0, M a pour limite O, la droite OM (d'angle polaire θ, à π près) a pour limite la droite OT d'angle polaire θ_0, à π près : OT est ainsi la tangente cherchée en O.

En résumé, *si r s'annule pour $\theta = \theta_0$, la courbe passe au pôle et en ce point elle est tangente à la droite qui a pour équation $\theta = \theta_0$.*

Si $f(\theta)$ a plusieurs zéros, on peut dire que $f(\theta) = 0$ représente le faisceau des tangentes en O aux divers arcs de la courbe Γ qui passent par ce point.

2° **Tangente en un point quelconque.** — *a) Détermination de l'angle* (OX, MT). — Nous savons que la tangente MT en M à Γ est le support du vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}$ (n° 12, 4°)

$$\vec{OM} = r\vec{u} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{M}}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\vec{u} + r\vec{p}.$$

Par rapport au repère mobile OX, OY,

MT a pour paramètres directeurs $\frac{dr}{d\theta}$ et r.

Appelons V l'angle, défini à π près, de la droite OX avec la tangente MT, dans le plan orienté :

$$V = (OX, MT), \qquad \boxed{\operatorname{tg} V = \frac{r\,d\theta}{dr}}$$

En désignant dorénavant par r' la dérivée $\frac{dr}{d\theta}$, nous retiendrons

$$\boxed{\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'}}$$

ou $\qquad \cot V = \frac{r'}{r}$ $\qquad$ dérivée logarithmique de r.

b) *Sous-tangente et sous-normale polaires.* — DÉFINITIONS. — **On appelle sous-tangente et sous-normale polaires en un point $M(\theta, r)$ d'une courbe les rayons vecteurs des points correspondant à l'angle polaire $\theta + \frac{\pi}{2}$ et situés respectivement sur la tangente et la normale en M.**

Pour calculer la sous-tangente en $M(\theta, r)$, soit $\overline{OT}$, il suffit d'écrire l'équation de la tangente dans le repère mobile OX, OY, soit

$$Y = (X - r)\operatorname{tg} V \qquad \text{ou} \qquad Y = \frac{r}{r'}(X - r);$$

en y faisant $X = 0$, on obtient la formule

$$\boxed{\frac{1}{TO} = \left(\frac{1}{r}\right)'}$$

la variable étant l'angle polaire θ.

On calcule de même la sous-normale en M, soit $\overline{ON}$, à partir de l'équation de la normale rapportée au repère mobile OX et OY, soit

$$Y = -(X - r)\cot V \qquad \text{ou} \qquad Y = -\frac{r'}{r}(X - r);$$

en y faisant $X = 0$, on obtient la formule

$$\boxed{\overline{ON} = r'}$$

la variable étant l'angle polaire θ.

La relation $\overline{OT} \cdot \overline{ON} = -r^2$ apparaît immédiatement dans le triangle TMN rectangle en M.

c) APPLICATION PRATIQUE. — Pour *construire* la tangente à une courbe Γ au point $M(\theta, r)$, on utilise la sous-normale polaire si r' se calcule facilement, la sous-tangente polaire si $\left(\frac{1}{r}\right)'$ se calcule facilement; lorsque la dérivée loga-

rithmique de r est d'un calcul aisé, on peut déterminer l'angle V par sa cotangente. Dans tous les cas, c'est par rapport au repère mobile que la tangente MT se trouve placée.

3° **Équations polaires de la tangente et de la normale.** — L'équation cartésienne de la tangente en $M(\theta, r)$ s'écrit immédiatement dans le repère mobile OX, OY sous la forme

$$\frac{X}{OM} + \frac{Y}{OT} = 1.$$

En remplaçant X et Y respectivement par $\rho\cos(\omega - \theta)$, $\rho\sin(\omega - \theta)$, ρ et ω étant les coordonnées polaires d'un point quelconque, et résolvant par rapport à $\frac{1}{\rho}$ l'équation obtenue, on trouve, pour équation polaire de la tangente en M,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\cos(\omega - \theta) + \left(\frac{1}{r}\right)'_\theta \sin(\omega - \theta). \tag{1}$$

L'équation cartésienne de la normale en M s'écrit de même, dans le repère mobile OX, OY, sous la forme

$$\frac{X}{OM} + \frac{Y}{ON} = 1. \tag{2}$$

La même transformation que ci-dessus donne, pour équation polaire de la normale en M,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\cos(\omega - \theta) + \frac{1}{r'_\theta}\sin(\omega - \theta).$$

REMARQUE. — On a vu (III, n° 141) que si $r = f(\theta)$ est *une* équation polaire d'une courbe Γ et A un point dont *un* système de coordonnées polaires est (α, a), l'existence de deux familles de systèmes de coordonnées polaires entraîne que l'appartenance de A à Γ n'est pas nécessairement équivalente à la relation $a = f(\alpha)$.

Rappelons toutefois que, dans le cas particulier d'une droite, toutes les équations polaires sont confondues; par suite, les équations (1) et (2) sont des conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance du point (ρ, ω) à la tangente et à la normale en M.

4° **Courbes homothétiques; courbes inverses.** — *a*) Si $r = f(\theta)$ est une équation polaire d'une courbe C, la courbe Γ homothétique de C dans l'homothétie (O, k) a pour équation

$$\rho = kf(\theta).$$

Pour une même valeur de θ, $\quad \frac{\rho}{\rho'} = \frac{r}{r'}$;

cette égalité est la traduction analytique du *parallélisme des tangentes en deux points homologues.*

b) Si $\qquad r = f(\theta)$

est une équation polaire d'une courbe C, la courbe Γ transformée de C dans l'inversion $[O, k]$ a pour équation $\qquad \rho = \frac{k}{f(\theta)}$.

De l'égalité $\rho r = k$ vérifiée quel que soit θ, résulte l'égalité

$$\rho r' + \rho' r = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\rho}{\rho'} + \frac{r}{r'} = 0;$$

cette égalité exprime que *les tangentes en deux points homologues ont des directions symétriques par rapport au support des rayons vecteurs de ces points.*

41. ***Problèmes sur les tangentes.*** — 1° *Tangentes de direction donnée.* — Déterminons une direction δ par l'un de ses angles polaires, soit $\alpha = (Ox, \delta)$.

Si M (θ, r) est un point d'une courbe Γ et V un angle de la droite OM avec la tangente MT en M, l'un des angles de Ox avec MT a pour valeur algébrique

$$(Ox, \text{MT}) = \theta + \text{V}.$$

Pour que la direction de MT soit δ, il faut et il suffit que α et $\theta + \text{V}$ aient une différence multiple de π, c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que

$$\theta + \text{V} = \alpha + k\pi.$$

Si V est connu en fonction de θ, cette équation donne les valeurs de θ qui correspondent aux points demandés. Si on connaît simplement $\operatorname{tg} \text{V} = \frac{r}{r'}$ on remplace l'équation par

$$\operatorname{tg} \text{V} = \operatorname{tg}(\alpha - \theta) \qquad \text{ou} \qquad \frac{r}{r'} = \operatorname{tg}(\alpha - \theta);$$

cette équation où θ est la seule inconnue détermine les solutions du problème.

En faisant $\alpha = 0$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on détermine les tangentes, soit parallèles à l'axe polaire, soit perpendiculaires à l'axe polaire.

2° *Tangentes passant par un point donné.* — Pour que la tangente en M (θ, r) à une courbe passe par un point donné A (α, a), il faut et il suffit (cf **40**, 3°) que

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r}\cos(\alpha - \theta) + \left(\frac{1}{r}\right)' \sin(\alpha - \theta),$$

$\frac{1}{r}$ étant exprimé en fonction de θ ainsi que sa dérivée.

Exemple. — Appliquons ce qui précède à la conique représentée par $\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{p}$.

L'équation qui détermine θ peut alors s'écrire

$$\frac{1}{a} - \frac{e}{p}\cos\alpha = \frac{1}{p}\cos(\alpha - \theta).$$

Si l'on a $\frac{(p - ae\cos\alpha)^2}{a^2} \leqslant 1$, il existe dans l'intervalle $(0, \pi)$ un angle β ayant pour cosinus $\frac{p - ae\cos\alpha}{a}$ et l'on peut mener A des tangentes réelles à la conique. Les angles polaires des points de contact sont, à des multiples près de 2π,

$$\theta = \alpha - \beta, \qquad \theta' = \alpha + \beta.$$

D'après ces formules, les droites OM et OM' qui joignent le foyer O aux points de contact sont symétriques par rapport à la droite OA qui a pour angle polaire α. On trouve ainsi un théorème de Poncelet : *La droite qui joint un foyer d'une conique au point d'intersection de deux tangentes à la courbe est bissectrice de l'un des angles formés par les droites qui joignent ce foyer aux points de contact.*

II. ÉTUDE LOCALE D'UNE COURBE $r = f(\theta)$.

42. ***Position par rapport à la tangente (point ordinaire).*** — 1° Nous avons vu (n° 16) que si $\frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2}$ n'est ni nul, ni colinéaire à $\frac{d\vec{M}}{d\theta}$, les deux arcs de la courbe Γ $[r = f(\theta)]$ qui aboutissent en M sont du même côté de la tangente MT en M que le vecteur $\overrightarrow{MJ} = \frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2}$.

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{M}}{d\theta} = r'\vec{u} + r\vec{p},$$

les dérivées étant toutes prises par rapport à θ;

$$\frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2} = r''\vec{u} + 2r'\vec{p} + r\frac{d\vec{p}}{d\theta}, \qquad \text{mais} \qquad \frac{d\vec{p}}{d\theta} = -\vec{u}$$

en sorte que finalement

$$\frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2} = (r'' - r)\vec{u} + 2r'\vec{p}.$$

Si la tangente en M ne passe pas par le pôle, la courbe Γ tourne sa concavité [resp sa convexité] vers O suivant que le vecteur $\overrightarrow{MO}$ est dans la concavité [resp. la convexité] de la courbe Γ en M.

Or dans le système cartésien XOY (fig. 37) l'équation de la tangente est

$$r'Y - rX + r^2 = 0.$$

La puissance analytique r^2 de O est positive; la puissance analytique du point J de coordonnées r'' et $2r'$ est

$$\mathfrak{L} = r^2 + 2r'^2 - rr''.$$

$\mathfrak{L} > 0 \iff$ la concavité en M est tournée vers O.
$\mathfrak{L} < 0 \iff$ la convexité en M est tournée vers O.

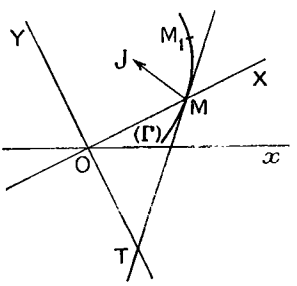


FIG. 37.

2° *Recherche des points d'inflexion analytique.* — Les points d'inflexion analytique sont ceux qui vérifient $\mathfrak{L} = 0$.

On retrouve ce résultat en cherchant les points où l'angle polaire de la tangente

$$\varphi = (Ox, MT) \qquad \text{ou} \qquad \varphi = \theta + V$$

est stationnaire;

$$\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dV}{d\theta} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}$$

$$\mathfrak{L} = 0 \iff \frac{d\varphi}{d\theta} = 0.$$

43. *Position par rapport à la tangente (cas particuliers).* — 1° Pour étudier dans tous les cas la position de la courbe Γ par rapport à la tangente en M, on va étudier la puissance analytique, par rapport à la tangente en M, d'un point M_1 distinct de M sur Γ. Dans le repère mobile $XOY\ [(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = \theta)]$, la tangente a pour équation

$$\frac{X}{\overline{OM}} + \frac{Y}{\overline{OT}} - 1 = 0.$$

Introduisons la fonction $\frac{1}{r} = g(\theta)$, l'équation précédente devient

$$gX + g'Y - 1 = 0.$$

Le point $M_1(\theta_1 = \theta + \omega)$ a pour coordonnées

$$X_1 = \frac{\cos\omega}{g(\theta_1)} \qquad Y_1 = \frac{\sin\omega}{g(\theta_1)},$$

et sa puissance analytique est

$$P = \frac{1}{g(\theta_1)}[g\cos\omega + g'\sin\omega] - 1;$$

ceile du pôle étant négative, la concavité sera tournée vers O si $P < 0$ au voisinage de $\omega = 0$; or P a même signe que

$$z = Pg^2(\theta_1) \qquad \text{ou} \qquad z = g(\theta_1)\,[g\cos\omega + g'\sin\omega - g(\theta + \omega)].$$

Le premier facteur a le signe de $g(\theta)$; le second facteur, Q, a pour développement limité

$$Q = g\left(1 - \frac{\omega^2}{2} + \dots\right) + g'\left(\omega - \frac{\omega^3}{6} + \dots\right) - \left(g + \omega g' + \frac{\omega^2}{2}g'' + \dots\right)$$

ou finalement

$$Q = -\frac{\omega^2}{2}(g + g'') - \frac{\omega^3}{6}(g' + g''') + \varepsilon\omega^3, \lim_{\omega \to 0} \varepsilon = 0.$$

Si $g + g'' \neq 0$, Q a, au voisinage de $\omega = 0$, le signe de sa partie principale, et z le signe de $-g(g + g'')$.

Si $g + g'' = 0$, mais $g' + g''' \neq 0$, Q change de signe avec ω, et M est un point d'inflexion géométrique pour Γ.

Le développement précédent serait poussé plus loin si $g' + g'''$ était nul aussi.

2° En résumé, on retiendra la règle suivante :

Suivant que l'une ou l'autre des expressions

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''\right]$$

est positive ou négative, la courbe tourne en M sa concavité ou sa convexité vers le pôle.

Si $\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)'' = 0$ ou $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$ avec $\left(\frac{1}{r}\right)' + \left(\frac{1}{r}\right)''' \neq 0$

le point M est un point d'inflexion géométrique.

3° On cherchera les points d'inflexion à partir de celle des expressions de r ou $\frac{1}{r}$ qui s'exprime le plus simplement en fonction de θ.

4° EXEMPLE. — Voir exemple n° 49, 3°.

44. *Branches infinies d'une courbe* $r = f(\theta)$. — 1° Direction asymptotique. — Supposons que $f(\theta)$ devienne infini lorsque θ tend vers α. Cela signifie que lorsque l'axe d'angle polaire θ tend vers l'axe d'angle polaire α, le rayon polaire OM devient infini. La direction d'angle polaire α est une direction asymptotique de la courbe Γ.

2° **Asymptote.** — Soit OX l'axe défini par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = \alpha$ et soit OY l'axe directement perpendiculaire.

Le repère OX, OY est le repère mobile associé au point à l'infini considéré.

Dans le système cartésien XOY, l'ordonnée du point $M(\theta, r)$ est

$$r \sin(\theta - \alpha)$$

et l'équation

$$Y = r \sin(\theta - \alpha)$$

représente la parallèle menée par M à la direction asymptotique OX (fig. 38). L'étude générale des branches infinies conduit à la règle à suivre pour étudier ces branches en coordonnées polaires :

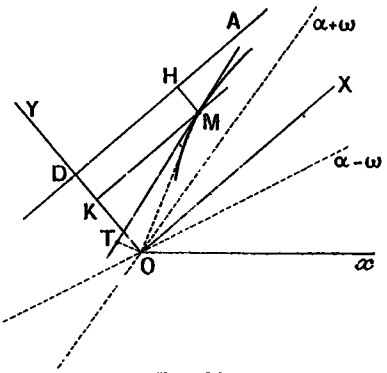


FIG. 38.

RÈGLE. — **Si le rayon polaire r d'un point M d'une courbe devient infini quand l'angle polaire θ de ce point tend vers α, M décrit une branche infinie qui a pour direction asymptotique celle de la droite OX telle que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = \alpha$.**

En outre :

1° **Si $r \sin(\theta - \alpha)$ devient infini, la branche est parabolique;**

2° **Si $r \sin(\theta - \alpha)$ tend vers d, la branche infinie est asymptote à la droite qui a pour équation $Y = d$ dans le système XOY.**

3° **Position des branches.** — Pour placer les branches infinies relatives à l'asymptote trouvée on observe que, dans le système cartésien XOY, l'excès de l'ordonnée de M sur celle de l'asymptote est

$$\overline{HM} = r\sin(\theta - \alpha) - d$$

et on suit la règle dont voici l'énoncé :

RÈGLE. — *Pour placer les branches infinies relatives à une asymptote donnée par la première règle, on étudie avec quel signe la différence* $Y_1 = r\sin(\theta - \alpha) - d$ *tend vers zéro quand* θ *tend vers* α *à droite ou à gauche. La comparaison du tracé de l'asymptote et de la direction du rayon vecteur défini par l'angle polaire* $\theta(\theta = \alpha + \omega,\ \theta = \alpha - \omega)$ *indique vers quelle extrémité de l'asymptote est la branche infinie; le signe de* Y_1 *indique de quel côté de l'asymptote elle se trouve.*

Pour étudier la limite de Y et le signe de Y_1, on pourra utiliser l'une des directives suivantes :

a) en posant $\theta = \alpha + \omega$, on peut faire un développement limité de

$$Y = r\sin(\theta - \alpha)$$

suivant les puissances croissantes de ω; supposons qu'on trouve ainsi

$$Y = d + l\omega + \varepsilon\omega, \qquad \lim_{\omega \to 0} \varepsilon = 0$$

on a simultanément l'asymptote $(Y = d)$ et, si $l \neq 0$, la disposition par rapport à l'asymptote (celle-ci dépend du signe de l).

b) si r est rationnel en $\sin\theta$ et $\cos\theta$, on peut essayer des transformations trigonométriques pour simplifier l'expression de Y, puis pour faire apparaître dans Y_1 un facteur de la forme $\sin p(\theta - \alpha)$.

REMARQUE. — Supposons l'équation polaire de l' mise sous la forme

$$\frac{1}{r} = g(\theta), \qquad \text{avec} \qquad g(\alpha) = 0.$$

$$Y = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{g(\theta)} \sim \frac{\theta - \alpha}{g(\theta) - g(\alpha)} \qquad \text{si } \theta \to \alpha.$$

Le dernier rapport a pour limite, si elle existe, l'inverse $\frac{1}{g'(\alpha)}$ de la dérivée de $g(\theta)$ pour $\theta = \alpha$.

La limite d de Y vérifie $\frac{1}{d} = g'(\alpha)$ ou $\frac{1}{d} = \left(\frac{1}{r}\right)'_{\alpha}$.

Or $g'(\theta) = \frac{1}{\overline{OT}}$, $\overline{OT}$ étant la sous-tangente polaire relative au point $M(\theta)$. Si $g'(\theta)$ est continue pour $\theta = \alpha$, on constate que la tangente en M a pour limite lorsque θ tend vers α l'asymptote à la branche infinie décrite par M, et on retrouve le résultat obtenu au n° 25.

On est ainsi conduit à appeler *sous-asymptote polaire* le nombre d, limite de la sous-tangente polaire.

4° **Cas particuliers.** — Si la direction asymptotique est celle de l'axe polaire $Ox(\alpha = k\pi)$ $\left[\text{resp. celle de l'axe perpendiculaire } Oy\left(\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right]$, il est inutile d'utiliser le changement d'axe polaire précédent : on cherche la limite de l'ordonnée $(y = r \sin\theta)$ [resp. la limite de l'abscisse $(x = r\cos\theta)$] dans le repère fixe xOy.

5° Exemple. — Voir l'exemple IV, au n° 48.

45. ***Point asymptote. Cercle asymptote. Spirales.*** — 1° Lorsque, θ devenant infini, $f(\theta)$ a une limite finie, la courbe $\Gamma[r = f(\theta)]$ présente un arc qui — sans répondre à la définition du n° 19 sur les branches infinies — ne peut être dessiné qu'en partie puisque OM tourne indéfiniment autour du pôle.

a) si $f(\theta)$ a pour limite 0, le point $M(\theta, r)$ a pour limite le pôle; on dit que le pôle est un *point asymptote*.

b) si $f(\theta)$ a pour limite $a \neq 0$, le point $M(\theta, r)$ se rapproche indéfiniment du cercle de centre O de rayon $|a|$; on dit que ce cercle est un *cercle asymptote* pour la courbe Γ.

2° Si $f(\theta)$ devient infini lorsque θ devient infini, on obtient une branche infinie de Γ sans direction asymptotique puisque la droite OM tourne indéfiniment autour du pôle. On obtient ce qu'on appelle une *spirale*.

3° Exemples. — Voir le n° 48, exemple V et le n° 50.

III. TRACÉ D'UNE COURBE PLANE REPRÉSENTÉE PAR UNE ÉQUATION POLAIRE

46. ***Marche à suivre pour construire une courbe représentée par une équation de la forme*** $r = f(\theta)$. — 1° On détermine le domaine où f est définie, et, lorsqu'il y a lieu, on détermine l'intervalle associé à l'arc générateur, comme cela sera expliqué au n° 47.

2° On décompose s'il y a lieu cet intervalle en intervalles partiels dans lesquels f est définie, continue et *conserve le même signe* puis l'on cherche ce que devient cette fonction aux limites de ces intervalles. Quand θ passe par un zéro de f le point correspondant passe au pôle et l'on connaît la tangente en ce point. On étudie les branches infinies dont l'existence est révélée par l'étude que l'on vient de faire. Les renseignements obtenus et, éventuellement, ceux que l'on relève en examinant f, permettent en général de tracer une ébauche de la courbe.

3° On peut préciser le tracé en étudiant la variation de f. Les valeurs de θ qui annulent f' sans annuler f correspondent à des points où la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur.

4° Si cette recherche est suggérée par la forme de f ou par l'ébauche tracée, on étudie la concavité vers le pôle. Lorsque la forme de la fonction se prête à cette étude, il peut être avantageux d'observer qu'elle permet de placer les branches infinies par rapport aux asymptotes.

5° **Points multiples.** — Il arrive que, θ variant dans un intervalle I tel que $M(\theta)$ décrive la courbe une et une seule fois, ce point passe par une même position A pour diverses valeurs de l'angle polaire. Lorsqu'il en est ainsi, plusieurs arcs de la courbe passent en A, A est un point multiple; c'est en particulier un point double si deux arcs passent en A.

De tels points multiples n'existent que si l'intervalle I a une amplitude supérieure à π. Distinguons deux cas :

a) Il existe un entier p tel que l'équation

$$f(\theta + 2p\pi) = f(\theta) \tag{4}$$

admette une racine θ_0, les nombres θ_0 et $\theta_0 + 2p\pi$ étant dans l'intervalle I. Les angles polaires θ_0 et $\theta_0 + 2p\pi$ donnent le même point.

b) Il existe un entier p tel que l'équation

$$f[\theta + (2p + 1)\pi] = -f(\theta)$$

admette une racine θ_1, les nombres θ_1 et $\theta_1 + (2p + 1)\pi$ étant dans l'intervalle I. A ces nombres correspond le même point.

Les tangentes aux différents arcs au point obtenu se trouvent en procédant comme nous l'avons dit pour les valeurs θ_0 et θ_1 qui donnent le point multiple.

47. *Réduction de l'intervalle d'étude de la fonction* $f(\theta)$. — 1er *Cas. La fonction* f *admet la période* P (P est la plus petite période positive).

I. — Si $P = 2\pi$ ou, plus généralement, $P = 2k\pi$, k étant un entier, les angles polaires θ et $\theta + P$ donnent le même point et on obtient toute la courbe en faisant varier θ dans un intervalle quelconque d'amplitude P, soit $[\alpha, \alpha + P]$, α étant arbitraire. Il en est ainsi quand θ n'intervient que par ses fonctions circulaires ou celles de $\frac{p}{q}\theta$, $\frac{p'}{q'}\theta$, ..., p, q, etc., étant des entiers.

Si $P = 2\frac{k}{n}\pi$, la fraction $\frac{k}{n}$ étant irréductible, le point $M_1(\theta + P)$ se déduit du point $M(\theta)$ par la rotation (O, P); la courbe est constituée par n portions qui se déduisent de l'une d'elles par des rotations successives de mesure algébrique P effectuées autour du pôle. Une de ces portions s'obtient en faisant varier θ dans un intervalle quelconque d'amplitude P.

Dans le cas particulier où $P = \pi$, la rotation se réduit à une symétrie par rapport au pôle.

Si $P = 2\alpha\pi$, α étant irrationnel, la courbe se compose d'une infinité de portions qui se déduisent, par les rotations de mesure algébrique P autour du pôle, de celle que donne l'intervalle $[\alpha, \alpha + P]$.

II. On dit que la fonction f admet le réel Q pour *antipériode* si

(1) $\qquad (\forall\theta) \qquad f(\theta + Q) = -f(\theta).$

S'il en est ainsi, f admet 2 Q pour période. Cela nous conduit à rechercher si $\frac{P}{2}$ est antipériode; supposons qu'il en soit ainsi : $f\left(\theta + \frac{P}{2}\right) = -f(\theta)$; le point $M'\left(\theta + \frac{P}{2}\right)$ se déduit du point $M(\theta)$ par la rotation de mesure algébrique $\frac{P}{2} + \pi$ autour du pôle (fig. 39). On obtient donc l'arc correspondant à l'intervalle $[\alpha, \alpha + P]$ en faisant varier θ de α à $\alpha + \frac{P}{2}$ et complétant par la rotation indiquée. Dans le cas particulier où $P = 2\pi$, $Q = \pi$, (1) devient

$$f(\theta + \pi) = -f(\theta),$$

M' coïncide avec M et l'on obtient toute la courbe en faisant varier θ dans l'intervalle $[\alpha, \alpha + \pi]$.

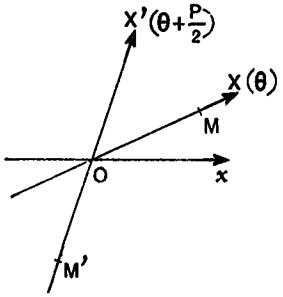
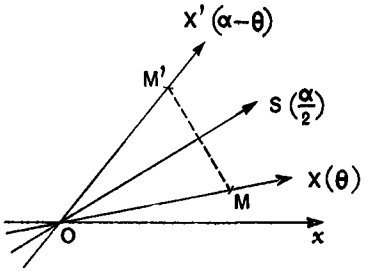


FIG. 39.

III. P_1 étant l'amplitude de l'intervalle déterminé $\left(P_1 = P \text{ ou } P_1 = \frac{P}{2}\right)$, on examine si des symétries par rapport à des axes passant par le pôle permettent de réduire encore l'intervalle de variation. A cet effet on cherche à déterminer un angle α tel que, quel que soit θ, on ait l'une des égalités

(2) $\qquad f(\alpha - \theta) = f(\theta), \qquad$ (3) $\qquad f(\alpha - \theta) = -f(\theta).$

Dans les applications, on essayera $\alpha = 0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}$.



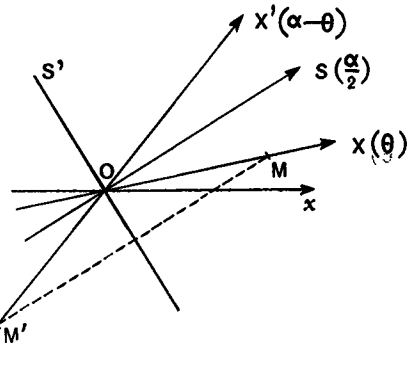


FIG. 40.

Les directions orientées définies par les angles polaires θ et $\alpha - \theta$ sont symétriques par rapport à l'axe OS tel que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OS}) = \frac{\alpha}{2}$.

Si l'égalité (2) est vérifiée, les points $M(\theta)$ et $M'(\alpha - \theta)$ sont symétriques par rapport à l'axe OS. Si l'égalité (3) est vérifiée, les points M, M' considérés sont symétriques par rapport à l'axe OS' perpendiculaire à OS.

Dans les deux cas, si l'on prend pour intervalle d'amplitude P_1 celui qui a pour milieu $\frac{\alpha}{2}$, soit $\left[\frac{\alpha}{2} - \frac{P_1}{2}, \frac{\alpha}{2} + \frac{P_1}{2}\right]$, les portions de la courbe relatives aux intervalles $\left[\frac{\alpha}{2} - \frac{P_1}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$ et $\left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} + \frac{P_1}{2}\right]$ se déduisent l'une de l'autre par la symétrie constatée.

Lorsque f est périodique, la réduction de l'intervalle de variation permet de déterminer un intervalle réel $\mathcal{C}$ tel que la représentation de Γ au moyen du paramètre $\theta (\theta \in \mathcal{C})$ soit propre (Γ est alors une succession d'arcs simples continus).

IV. — Lorsqu'on aura pu réduire le champ d'existence de f comme on l'a expliqué précédemment, on aura obtenu en général un intervalle I tel que, θ parcourant I, le point M décrive un arc γ de Γ; une fois tracé γ, des symétries ou des rotations permettront d'en déduire Γ; on peut dire que γ est l'arc générateur de Γ. C'est seulement sur l'intervalle I qu'on étudiera le signe de f, et qu'on cherchera, le cas échéant, les branches infinies.

2e *Cas. La fonction f n'est pas périodique.* — Pour obtenir toute la courbe, il faut donner à θ toutes les valeurs pour lesquelles la fonction est définie.

Des considérations de symétrie analogues à celles qui ont été développées au III du 1er cas permettent quelquefois de réduire l'intervalle de variation.

48. ***Exemples de courbes représentées par une équation polaire.*** — EXEMPLE 1

$$r = a(\cos\theta - \cos 2\theta), \qquad a > 0.$$

La fonction r est périodique, 2π étant la période; nous construirons donc la courbe Γ étudiée en faisant varier θ dans un intervalle d'amplitude 2π; la fonction r étant paire, la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe polaire Ox, et il suffit de construire l'arc générateur γ obtenu quand θ varie de 0 à π; une symétrie par rapport à Ox donnera l'arc γ_1 obtenu quand θ varie de 0 à $-\pi$. La fonction r s'annule pour les racines de l'équation $\cos\theta = \cos 2\theta$, c'est-à-dire $\theta = 2k\frac{\pi}{3}$, k étant entier. Seules les valeurs 0 et $\frac{2\pi}{3}$ sont à retenir dans l'intervalle considéré, r est positif dans l'intervalle $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, négatif dans l'intervalle $\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$.

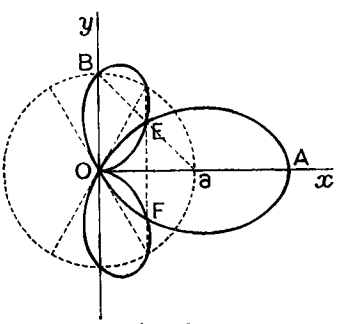


FIG. 41.

La courbe Γ est tangente au pôle à l'axe polaire et à la droite qui a pour angle polaire $\frac{2\pi}{3}$ (fig. 41). La calcul de la sous-normale polaire, $r' = a\sin\theta(4\cos\theta - 1)$ montre

qu'au point $A(\pi)$ la tangente est perpendiculaire à l'axe polaire, et qu'au point $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$ la tangente fait avec le rayon vecteur l'angle $\frac{\pi}{4}$. On peut alors tracer une ébauche de l'arc γ; en traçant l'arc γ_1 symétrique par rapport à Ox, on constate l'existence de deux points doubles E et F symétriques par rapport à Ox. Précisons leur position. Ces points ne peuvent être obtenus que pour deux valeurs de l'angle polaire différant de π auxquelles correspondent deux rayons polaires opposés. Si θ et $\theta - \pi$ sont ces valeurs, θ est racine de l'équation $r(\theta - \pi) = -r(\theta)$ qui se réduit à $\cos 2\theta = 0$: pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$, on obtient le point E $\left(\text{qui serait aussi obtenu pour } -\frac{3\pi}{4}\right)$, et pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $r = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, on obtient point F $\left(\text{qui serait aussi obtenu pour } -\frac{\pi}{4}\right)$.

EXEMPLE II. $\qquad r = a \sin\frac{2\theta}{3}, \qquad a > 0.$

La fonction r admet la période 3π : la courbe Γ étudiée est donc symétrique par rapport au pôle O; il suffira de construire l'arc γ_1 obtenu en faisant varier θ dans un intervalle $(\alpha, \alpha + 3\pi)$, puis une symétrie par rapport à O donnera le reste γ_1' de la courbe Γ. Si l'on change θ en $\theta + \frac{3\pi}{2}$, r se change en $-r$: le point $M'\left(\theta + \frac{3\pi}{2}, -r\right)$ se déduit du point $M(\theta, r)$ par la rotation qui a O pour centre et $\frac{3\pi}{2} + \pi$, c'est-à-dire encore $\frac{\pi}{2}$, pour mesure algébrique; il suffira de construire l'arc γ_2 obtenu en faisant varier θ dans un intervalle $\left(\alpha, \alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$, puis une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de O permettra de compléter la construction de l'arc γ_1. Enfin la fonction r est impaire, et la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe Oy perpendiculaire à l'axe polaire Ox; on prendra pour intervalle d'amplitude $\frac{3\pi}{2}$ celui $\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ qui a pour milieu 0 et il suffira de construire l'arc générateur γ_3 obtenu en faisant varier θ dans l'intervalle $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$, puis une symétrie par rapport à Oy permettra de compléter la construction de l'arc γ_2 (fig. 42).

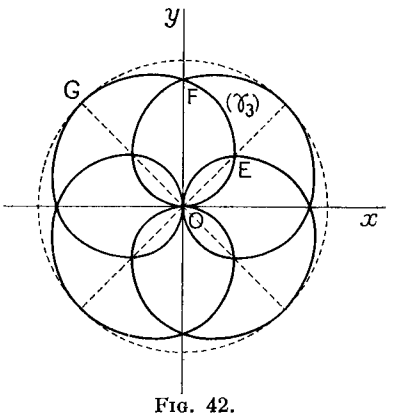


FIG. 42.

Pour tracer l'arc γ_3 nous avons marqué les points O, E, F, G qui ont pour angles polaires $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$; les tangentes en ces points s'obtiennent en calculant $r' = \frac{2}{3}\cos\frac{2\theta}{3}$ et en construisant la sous-normale polaire relative à chacun de ces points. Les points $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ainsi que ceux qui s'en déduisent par symétrie par rapport à Ox, Oy ou par rapport aux bissectrices de ces deux axes sont des points doubles pour la courbe Γ.

EXEMPLE III. — L'hyperbole équilatère H représentée par l'équation cartésienne

$$x^2 - y^2 = a^2$$

a pour équation dans le système de coordonnées polaires associé aux axes Ox, Oy

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta};$$

son inverse L dans l'inversion $[O, a^2]$ a pour équation polaire

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Construisons cette courbe, appelée *lemniscate de Bernoulli*. Pour chaque valeur de θ telle que $\cos 2\theta$ soit positif on obtient deux points M et M' de la courbe L symétriques par rapport au pôle O; l'équation ne changeant pas quand on change θ en $-\theta$, L est symétrique par rapport à l'axe polaire. Il suffit de construire l'arc obtenu en faisant varier θ à $\frac{\pi}{4}$ dans la formule

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta};$$

cet arc part de A perpendiculairement à Ox et arrive en O tangentiellement à la première bissectrice (fig. 43).

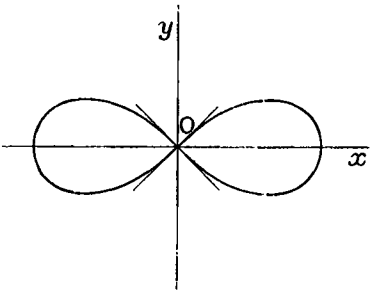


FIG. 43.

EXEMPLE IV.

$$r = \frac{a}{\cos\theta - \cos 2\theta}.$$

Cette courbe C est inverse, dans l'inversion $[O, a^2]$, de la courbe Γ représentée par l'équation $r = a(\cos\theta - \cos 2\theta)$ et que nous avons construite. Comme pour cette courbe, il nous suffira de faire varier θ de 0 à π pour construire un arc d'où l'on déduira, par symétrie relative à l'axe polaire Ox, la courbe C tout entière. Bornons-nous à étudier les branches infinies de C.

I) Lorsque θ tend vers $\frac{2\pi}{3}$, r devient infini; $Y = r\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$ s'écrit, en posant $\theta = \frac{2\pi}{3} + \omega$,

$$Y = a\frac{\sin\omega}{\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \omega\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2\omega\right)}.$$

Nous obtiendrons simultanément l'asymptote et la disposition de la courbe par rapport à cette asymptote en effectuant un développement limité de Y à l'ordre 1 suivant les puissances croissantes de ω. Comme le numérateur N et le dénominateur D sont des infiniment petits du premier ordre, il faut prendre leurs développements à l'ordre 2; la partie régulière de celui de N est ω; celle de $\cos(\alpha + \omega) = f(\alpha + \omega)$ peut s'obtenir à partir de la formule de Taylor qui nécessite seulement le calcul de $f(\alpha) = \cos\alpha$, $f'(\alpha) = -\sin\alpha$, $f''(\alpha) = -\cos\alpha$, soit $\cos\alpha - \omega\sin\alpha - \frac{\omega^2}{2}\cos\alpha$; on trouve ainsi pour partie régulière du développement de D

$$\left(-\frac{1}{2} - \omega\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\omega^2}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \omega\sqrt{3} + \omega^2\right) \quad \text{ou} \quad -\frac{3}{2}\omega\sqrt{3} - \frac{3\omega^2}{4}.$$

Il suffit de diviser 1 par $-\frac{3}{2}\sqrt{3}\omega$ pour trouver

$$Y = -\frac{2a}{3\sqrt{3}} + \frac{a\omega}{9} + \varepsilon\omega, \ \varepsilon \text{ tendant vers 0 avec } \omega,$$

L'asymptote Δ a pour ordonnée $-\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ dans le système cartésien OX, OY défini par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = \frac{2\pi}{3}$; la disposition des branches infinies par rapport à Δ résulte de l'étude du signe de $Y_1 = Y + \frac{2a}{3\sqrt{3}}$ qui est celui de $\frac{a\omega}{9}$.

A titre d'exercice, retrouvons les résultats précédents par des transformations trigonométriques; D peut s'écrire

$$D = \frac{1}{2}(\cos 2\omega - \cos\omega) - \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\omega + \sin 2\omega);$$

$\cos 2\omega - \cos\omega$ est un infiniment petit du second ordre par rapport à ω; $\sin\omega + \sin 2\omega$ est un infiniment petit du premier ordre équivalent à 3ω, par suite D est équivalent à $-\frac{3\sqrt{3}}{2}\omega$ et Y tend vers $\frac{-2a}{3\sqrt{3}}$, ce qui permet de tracer l'asymptote Δ. La disposition des branches infinies par rapport à Δ résulte de l'étude du signe de

$$Y_1 = Y + \frac{2a}{3\sqrt{3}},$$

c'est-à-dire de

$$Y_1 = \frac{a\sin\omega}{D} + \frac{2a}{3\sqrt{3}} = a\frac{3\sqrt{3}\sin\omega + 2D}{3\sqrt{3}D}.$$

Nous connaissons la partie principale du dénominateur, $\frac{-27}{2}\omega$; cherchons celle du numérateur :

$$N_1 = 3\sqrt{3}\sin\omega + 2D$$

ou successivement

$$(\cos 2\omega - \cos\omega) + \sqrt{3}(2\sin\omega - \sin 2\omega),$$

$$(2\cos^2\omega - \cos\omega - 1) + 2\sqrt{3}\sin\omega(1 - \cos\omega)$$

et enfin

$$N_1 = (1 - \cos\omega)[-2\cos\omega - 1 + 2\sqrt{3}\sin\omega].$$

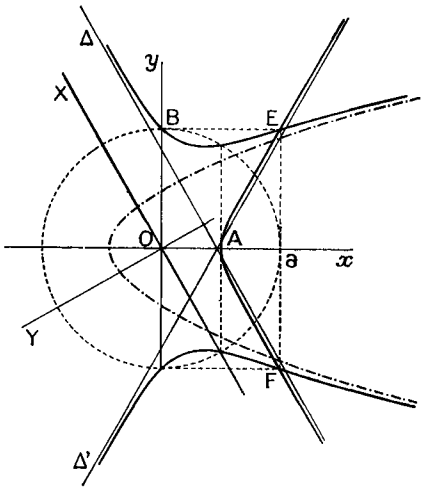


FIG. 44.

N_1 est un infiniment petit équivalent à $-\frac{3\omega^2}{2}$, et par suite Y_1 est équivalent à $\frac{a\omega}{9}$, d'où la disposition de la figure 44.

Le calcul précédent donne en outre les points communs à C et à l'asymptote Δ; outre la racine double $\omega = 0$, l'équation $N_1 = 0$ admet comme racines celles de l'équation

$$2\cos\omega - 2\sqrt{3}\sin\omega + 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad 4\cos\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$$

les angles polaires des points cherchés sont les solutions de l'équation

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}.$$

II) Lorsque θ tend vers 0, r devient infini; la direction de Ox est une direction asymptotique pour C; il suffit d'étudier la limite de l'ordonnée y du point générique M dans le système cartésien xOy.

$$y = r\sin\theta \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{a\sin\theta}{\cos\theta - \cos 2\theta};$$

le numérateur est un infiniment petit du premier ordre alors que le dénominateur est un infiniment petit du second ordre; y devient infini et la branche infinie est parabolique.

Le lecteur pourra chercher les coefficients λ et μ de façon que la parabole II représentée par l'équation

$$y^2 + \lambda x + \mu = 0$$

rencontre C en un nombre maximum de points confondus avec le point à l'infini sur Ox, c'est-à-dire de façon que l'équation aux θ des points communs à II et à C,

$$a^2\sin^2\theta + \lambda a\cos\theta(\cos\theta - \cos 2\theta) + \mu(\cos\theta - \cos 2\theta)^2 = 0,$$

admette 0 comme racine a l'ordre maximum. A cet effet, le lecteur pourra, en posant $\cos\theta = u$, former l'équation $f(u) = 0$ avec

$$f(u) = a^2(1-u^2) + \lambda a u(1-u)(2u+1) + \mu(1-u)^2(2u+1)^2$$

et disposer de λ et de μ de façon que le polynôme $f(u)$ soit divisible par la plus haute puissance possible de $1-u$; il trouvera ainsi que la parabole II representée par

$$y^2 - \frac{2}{3}ax - \frac{7a^2}{27} = 0$$

coupe C en deux points seulement à distance finie, les angles polaires de ce points sont solutions de l'équation $\cos\theta = -\frac{5}{7}$.

Les points doubles de C sont les inverses des points doubles de la courbe Γ de l'exemple I; ils correspondent aux angles polaires $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$, et leurs rayons polaires sont $a\sqrt{2}$ et $-a\sqrt{2}$.

EXEMPLE V. $$r = a\frac{\theta}{\theta - 1}, \qquad a > 0.$$

Pour construire la courbe C représentée par cette équation, nous devons faire varier θ de $-\infty$ à $+\infty$. Le tableau suivant donne le signe de r :

θ	$-\infty$		0		1		$+\infty$
r	a	$+$	0	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	a

r est une fonction décroissante de θ dans chaque intervalle où elle est définie. La courbe est tangente en O à Ox. La branche infinie qui correspond à $\theta = 1$ s'étudie en posant $\theta = 1 + \omega$, et en cherchant un développement limité de

$$Y = r\sin(\theta - 1) \quad \text{ou} \quad a\frac{1+\omega}{\omega}\sin\omega$$

$$Y = a(1+\omega)\left(1 - \frac{\omega^2}{6} + \varepsilon\omega^3\right)$$

$$Y = a(1 + \omega + \varepsilon'\omega)$$

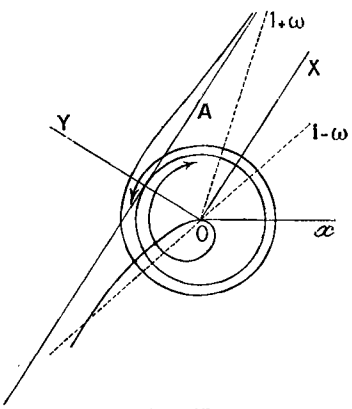


FIG. 45.

ε et ε' étant infiniment petits avec ω. Dans le système cartésien XOY défini par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = 1$, l'asymptote a pour ordonnée a; pour ω positif voisin de zéro, la branche est au-dessus de l'asymptote et à droite, c'est le contraire pour ω négatif voisin de zéro (fig. 45).

Si θ devient infini par valeurs positives, r tend vers a par valeurs supérieures, le point M de C est extérieur au cercle Σ de centre O et de rayon a; OM tourne dans le sens positif. Le point M décrit un arc asymptote au cercle Σ.

Si θ devient infini par valeurs négatives, r tend vers a par valeurs inférieures, et M est intérieur au cercle Σ; OM tourne dans le sens négatif.

Notons que l'intersection L avec le cercle Σ correspond à la racine de l'équation $r = -a$ qui est $\theta = \frac{1}{2}$.

Le tracé de la courbe met en évidence des points doubles; r étant une fonction homographique de θ, pour θ et $\theta + 2k\pi$, r prend des valeurs distinctes; mais pour chaque valeur de l'entier k on peut trouver deux valeurs de θ telles que

$$(1) \qquad a\frac{\theta + 2k\pi + \pi}{\theta + 2k\pi + \pi - 1} = -a\frac{\theta}{\theta - 1}.$$

Ces deux valeurs θ_k et θ'_k sont racines de l'équation

$$(E_k) \quad F(\theta) = 0 \quad \text{avec} \quad F(\theta) = \theta^2 + \theta(2k\pi + \pi - 1) - (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

$F(0) = -(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $F(1) = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ montre qu'une racine est comprise entre 0 et 1, soit θ_k; elle donne le point double M_k.

L'autre racine $\theta'_k = -\theta_k - 2k\pi - \pi + 1$ donne le point double M'_k, mais M'_k est aussi fourni d'après la formation de l'équation (1) pour la valeur $\overline{\theta}'_k = \theta'_k + 2k\pi + \pi$ ou $1 - \theta_k$. $\theta_k + \overline{\theta}'_k = 1$ montre que les droites OM_k et OM'_k sont symétriques par rapport à la droite OL.

On montre aisément que la transformée de l'équation E_k par la formule

$$\overline{\theta} = \theta + (2k+1)\pi$$

est l'équation $E_{-(k+1)}$, en sorte que pour obtenir tous les points doubles, il suffit de considérer les entiers $k \geqslant 0$.

IV. ÉTUDE DE QUELQUES COURBES

49. ***Courbes conchoïdes.*** — 1° **Définition.** — Étant donnés un point O et une courbe C, si à tout point P de C on fait correspondre les points M, M′ de la droite OP qui sont situés à une distance donnée de P, le lieu géométrique de ces points M, M′ est ce qu'on appelle une conchoïde de C.

Observons que si Γ est une conchoïde de C, la courbe C appartient à une conchoïde de Γ.

Équation générale. — Prenons le point O pour pôle et bornons-nous au cas où l'équation de la courbe C peut s'écrire

(1) $$r = f(\theta).$$

Si l est la longueur donnée, la conchoïde est l'ensemble des points dont les coordonnées polaires vérifient l'une des équations

(2) $$r = f(\theta) + l, \qquad (2)' \qquad r = f(\theta) - l.$$

2° **Propriétés générales.** — *a) Sous-normale polaire et tangente.* — Les fonctions f et $f + l$ ayant même dérivée, la sous-normale polaire à la conchoïde d'une courbe C en l'un de ses points est la même que la sous-normale polaire à la courbe C au point correspondant.

D'après cette propriété, pour construire la normale en M à la conchoïde, on prend l'intersection N de la normale à la courbe C au point correspondant P et de la perpendiculaire en O au rayon vecteur OP, la droite MN est la normale demandée, on en déduit la tangente (fig. 46).

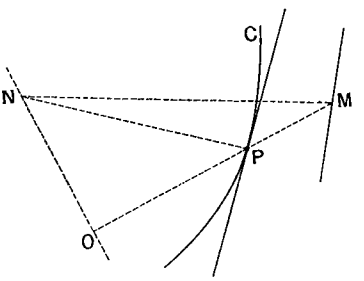


FIG. 46.

b) Le pôle appartient à la conchoïde. — Pour que M soit en O, il faut et il suffit que P soit à l'intersection de la courbe C et du cercle décrit du pôle comme centre avec l pour rayon. Ce cercle et la courbe donnée ont des points communs P_1, P_2, etc. Si P vient en P_1 par exemple, l'un des points de la conchoïde qui correspondent à P vient en O; si M est ce point, la droite OM ayant pour position limite OP_1, on en conclut : 1° qu'il y a autant d'arcs de la conchoïde qui passent en O qu'il existe de points P_1, P_2, etc.; 2° que les tangentes en ce point O sont les droites OP_1, OP_2, etc.

c) *Branches infinies.* — Si P décrit une branche infinie de la courbe C, le point M décrit une branche infinie de la conchoïde, et si la première admet pour direction asymptotique Oδ, il en est de même de la seconde.

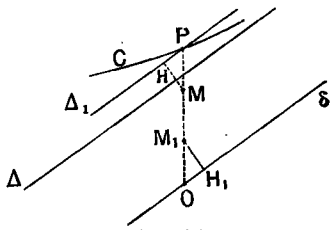


FIG. 47.

Si la première branche est asymptote à Δ, cette droite est la limite de $P\Delta_1$, parallèle à Δ (fig. 47). Prenons sur la droite OP le point M_1 tel que $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{MP}$; la distance de M_1 à Oδ tend vers zéro, il en est de même de la distance de M à $P\Delta_1$, on en conclut que les asymptotes de la courbe donnée sont aussi des asymptotes de la conchoïde.

3° **Conchoïde d'un cercle par rapport à l'un de ses points ou Limaçon de Pascal.** — Soit *a* le diamètre d'un cercle C; en orientant l'axe polaire du pôle O (pris sur C) vers le centre, on peut représenter le cercle par l'équation

(3) $$r = a\cos\theta, \qquad a > 0.$$

Les points de la conchoïde γ vérifient l'une ou l'autre des deux équations

(4) $f(\theta,r) = 0$ avec $f(\theta,r) = r - a\cos\theta - l$

(4') $g(\theta,r) = 0$ avec $g(\theta,r) = -r + a\cos\theta - l$

où l'on peut supposer *l* positif.

Nous constatons que $g(\theta,r) = f(\theta + \pi, -r)$

Il en résulte (cf. tome III) que (4) et (4') sont deux équations *différentes* d'une même courbe.

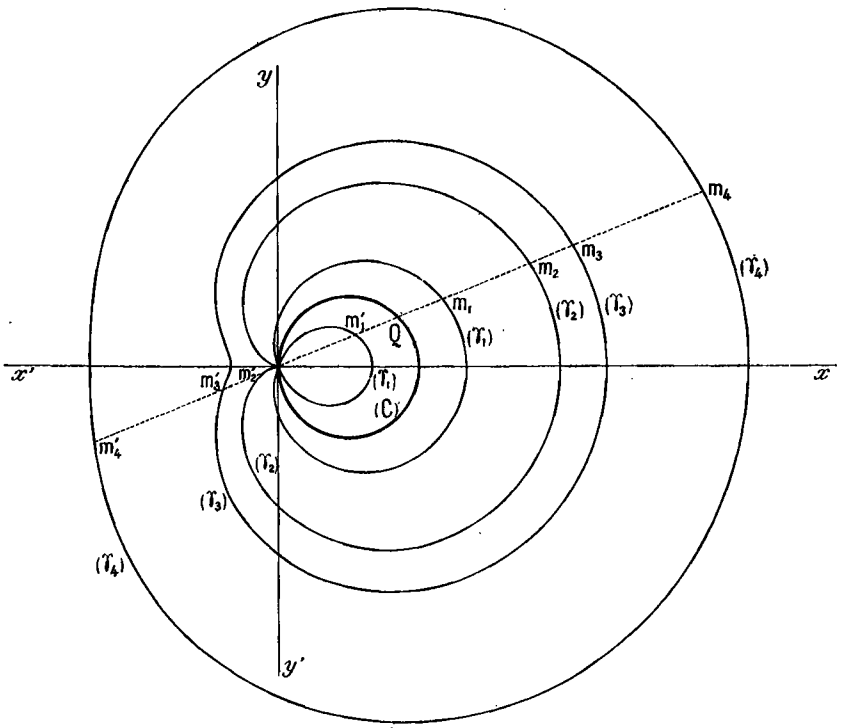


FIG. 48.

Il suffit pour représenter et pour construire la conchoïde γ de garder l'équation (4). Le rayon polaire r est une fonction paire de θ qui admet 2π pour période; la courbe γ est donc symétrique par rapport à l'axe polaire; il suffit de faire varier θ de 0 à π, d'où le tableau suivant :

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
r	$a+l$	↘	l	↘	$-a+l$

1° $l < a$, r s'annule pour une valeur θ_1 comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π et telle que $\cos\theta_1 = -\frac{l}{a}$; la conchoïde γ présente un point double au pôle; les tangentes en O ont pour angles polaires θ_1 et $-\theta_1$, elles passent par les points communs au cercle C et au cercle qui a pour centre O et pour rayon l (courbe γ_1 de la figure 48).

2° $l = a$, r s'annule pour $\theta = \pi$, et la courbe correspondante présente au pôle un rebroussement de première espèce (courbe γ_2 de la figure 48). Cette courbe est encore appelée cardioïde (cf. n° 72, 2°).

3° $l > a$, r reste positif; la conchoïde présente deux formes distinctes suivant qu'il existe ou qu'il n'existe pas de points où la tangente est perpendiculaire à l'axe polaire (en dehors, bien entendu, des points situés sur l'axe polaire). La normale en un point quelconque M de γ passe par le point N diamétralement opposé au point P sur le cercle C, ON étant la sous-normale polaire commune à C et à γ. La tangente en M sera perpendiculaire à Ox si MN est parallèle à Ox, c'est-à-dire (fig. 49) si O est milieu de MP, ou enfin si P est à la distance $\frac{l}{2}$ du point O, ce qui n'est possible que si $l < 2a$.

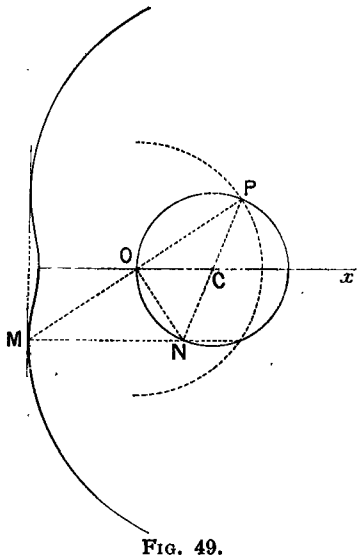


FIG. 49.

On peut encore trouver ces points en observant que l'angle polaire de la tangente à une courbe en coordonnées polaires étant en général $\theta + V$, pour les points cherchés $\theta + V = \frac{\pi}{2} + k\pi$, équation équivalente à

$$\operatorname{tg} V = \cot\theta \quad \text{ou} \quad \frac{r}{r'} = \cot\theta, \quad \text{et enfin} \quad \cos\theta = -\frac{l}{2a}.$$

Les points d'inflexion de la conchoïde γ sont fournis par la résolution de l'équation

$$r^3 + 2r'^2 - rr'' = 0$$

ce qui donne ici

$$\cos\theta = -\frac{2a^2 + l^2}{3al};$$

ces points n'existent que si $\frac{2a^2 + l^2}{3al}$ est inférieur à 1, c'est-à-dire si l est compris entre a et $2a$, c'est le cas où γ ne présente pas de point double, mais possède en dehors de l'axe polaire des points où la tangente est perpendiculaire à Ox (courbe γ_3 de la fig. 48).

REMARQUE. — L'inverse de la conchoïde précédente γ ($r = a\cos\theta + l$) dans l'inversion [O, k] est la courbe représentée par

$$\rho = \frac{k}{a\cos\theta + l} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \quad p = \frac{k}{l}, \quad e = \frac{a}{l}.$$

L'inverse d'une conique ayant un foyer au centre d'inversion est, relativement à ce point, un limaçon de Pascal et réciproquement. En particulier l'inverse d'une parabole ayant un foyer au centre d'inversion est une cardioïde ayant son point de rebroussement au centre d'inversion.

50. *Spirales.* — Nous allons étudier trois spirales classiques.

1° *Courbes Γ dont les rayons vecteurs font un angle donné avec les tangentes à leur extrémité.*

L'angle V défini au n° 40 est ici une constante, et toute courbe Γ satisfait à l'équation différentielle.

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \operatorname{tg} V.$$

a) si $V = \frac{\pi}{2}$, $dr = 0$, r est une constante et Γ est un cercle quelconque ayant le pôle pour centre;

b) si $V = 0$, $d\theta = 0$, θ est une constante; on retrouve que les seules lignes dont les tangentes passent par un point donné sont les droites passant par ce point (37);

c) dans le cas général où V n'est ni nul, ni droit, Γ satisfait à l'équation différentielle à variables séparées

$$\frac{dr}{r} = d\theta . \cot V$$

dont l'intégrale générale est $\operatorname{Log}|r| = (\theta - \theta_0) \cot V$, θ_0 étant une constante.

Cette équation équivaut à

$$r = \varepsilon e^{(\theta - \theta_0)\cot V}, \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon = \pm 1. \tag{1}$$

Relativement à l'axe polaire OX défini par $(\vec{Ox}, \vec{OX}) = \theta_0$, on obtient les deux équations $r = e^{\theta \cot V}$ et $r = -e^{\theta \cot V}$; toutes les solutions du problème se déduisent par des rotations autour du pôle de la courbe γ définie par

$$r = e^{\theta \cot V}. \tag{2}$$

On peut aussi observer que l'équation (1) peut s'écrire

$$r = \lambda e^{\theta \cot V}, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \varepsilon e^{-\theta_0 \cot V}; \tag{1'}$$

les courbes définies par (1'), quand λ varie, sont toutes les homothétiques de γ par rapport au pôle. On trouve ainsi des courbes qui sont à la fois égales à γ et homothétiques de γ dans une homothétie de rapport quelconque.

L'équation (2) s'écrit encore

$$r = a^{\theta}, \qquad \text{avec} \qquad a = e^{\cot V}; \tag{2'}$$

c'est donc qu'un angle polaire d'un point de γ est le logarithme du rayon polaire de ce point dans le système de base a; γ est appelée *spirale logarithmique*; γ est la représentation polaire de la fonction exponentielle,

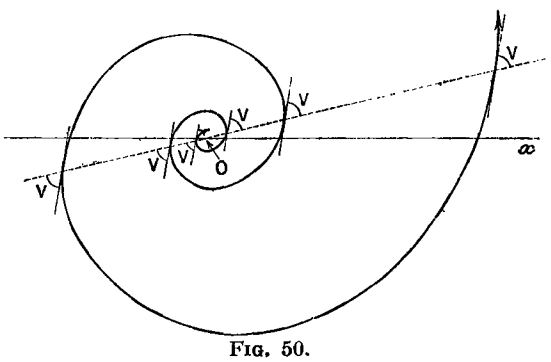


FIG. 50.

Si l'on change V en $-V$ et θ en $-\theta$, r ne change pas, on en conclut que les courbes Γ qui correspondent à deux valeurs opposées de V sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe polaire.

Nous obtiendrons donc, à cette symétrie près, toutes les courbes Γ en supposant V compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Si θ varie de $-\infty$ à $+\infty$, r croît de 0 à $+\infty$, le point M qui décrit la courbe Γ tourne indéfiniment autour du pôle en s'en éloignant indéfiniment; θ devenant infini par valeurs positives, la branche infinie que décrit M n'admet pas de direction asymptotique (fig. 50).

Quand on change θ en $\theta + \pi$, r est remplacé par $re^{\pi \cot V}$; on en conclut que l'arc correspondant à un intervalle $(\alpha, \alpha + \pi)$ donne par l'homothétie $(O, -e^{\pi \cot V})$ l'arc qui correspond à l'intervalle $(\alpha + \pi, \alpha + 2\pi)$.

θ devenant infini par valeurs négatives, M tend vers le pôle en tournant indéfiniment autour de ce point, le pôle est un point asymptote.

REMARQUE. — L'inversion $[O, k]$ transforme la spirale γ en la courbe γ_1

$$r_1 = ke^{-\theta \cot V}$$

qui est une spirale de la même famille, associée à la valeur $-V$ de l'angle du rayon vecteur avec la tangente, ce qui s'explique par la remarque du n° 40, 4°, *b*).

2° *Courbes* Γ *dont la sous-tangente polaire est constante.* — Si a est la longueur donnée de la sous-tangente polaire, les courbes Γ cherchées sont les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$\left(\frac{1}{r}\right)'_\theta = \frac{1}{a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta - \theta_0}{a}, \ \theta_0 \text{ étant une constante.} \qquad (1)$$

Celle de ces courbes qui correspond à la valeur θ_0 de la constante se déduit par rotation autour du pôle de la courbe γ qui a pour équation

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{a} \qquad \text{ou} \qquad r = \frac{a}{\theta}.$$

Si l'on change a en $-a$ et θ en $-\theta$, r ne change pas, les deux courbes Γ qui correspondent à deux valeurs opposées de a sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe polaire.

Construisons Γ en supposant $a > 0$. A deux valeurs opposées de θ correspondent deux valeurs opposées de r et, par suite, deux points symétriques par rapport à Oy. Il suffit de faire varier θ de 0 à $+\infty$ et de compléter la courbe par symétrie par rapport à Oy.

Quand θ croît de 0 à $+\infty$, r décroît de $+\infty$ à 0, M tourne indéfiniment autour du pôle qui est un point asymptote.

Quand θ tend vers 0, M s'éloigne à l'infini et comme OM tend vers Ox, la branche infinie que décrit M admet Ox pour direction asymptotique. Dans le système cartésien associé, l'ordonnée de M (θ, r) est

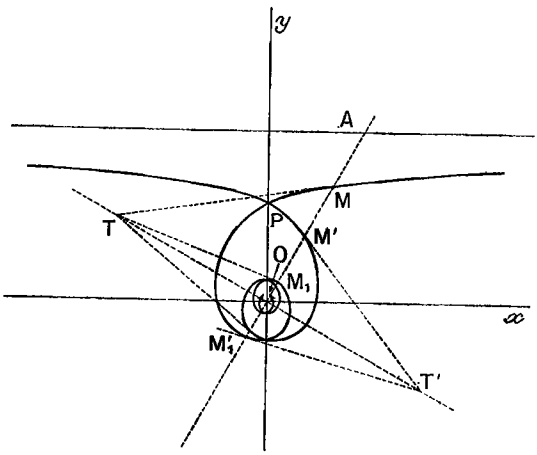


FIG. 51.

$$y = r \sin\theta \qquad \text{ou} \qquad y = a\frac{\sin\theta}{\theta},$$

elle tend vers a, la branche infinie est asymptote à la droite A qui a pour équation $Y = a$; de plus $\frac{\sin\theta}{\theta}$ étant plus petit que 1, y est inférieur à a, la courbe est au-dessous de l'asymptote.

D'après la constance de la sous-tangente polaire, les tangentes en des points M, M_1,... donnés par des angles polaires qui ont pour valeurs $\theta + 2k\pi$, θ étant choisi et k étant un entier quelconque, concourent au point T $\left(\theta + \frac{\pi}{2}, a\right)$, les tangentes aux points qui

ont pour angles polaires $\theta + (2k+1)\pi$ concourent au point T' symétrique de T par rapport au pôle.

La courbe a une infinité de points doubles tels que P allgnés sur Oy. Chacun correspond à deux angles polaires $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ et $-(2k+1)\frac{\pi}{2}$ dont la différence, $(2k+1)\pi$ est un multiple impair de π et à deux rayons vecteurs opposés r et $-r$.

Toute courbe définie par l'équation (1) est dite *spirale hyperbolique* (fig. 51).

3° *Courbes* Γ *dont la sous-normale polaire est constante.* — Si a est la longueur donnée de la sous-normale polaire, les courbes Γ cherchées sont les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$r'_\theta = a \implies r = a(\theta - \theta_0), \ \theta_0 \text{ étant une constante.} \qquad (2)$$

Celle de ces courbes qui correspond à la valeur θ_0 de la constante se déduit par rotation autour du pôle de la courbe γ qui a pour équation

$$r = a\theta.$$

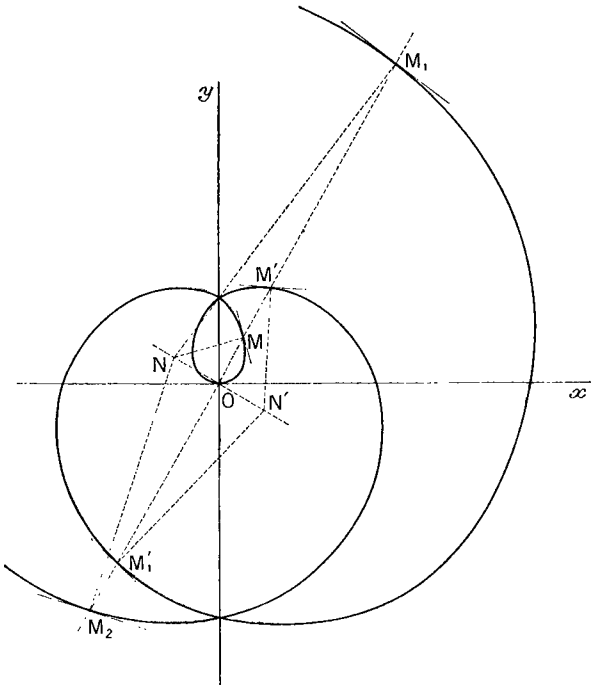


FIG. 52.

A deux valeurs opposées de a correspondent deux courbes symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe polaire. Nous construisons Γ en supposant $a > 0$. Comme pour la spirale hyperbolique, on reconnaît qu'il suffit de faire varier θ de 0 à $+\infty$ et de compléter la courbe par symétrie par rapport à l'axe Oy perpendiculaire à l'axe polaire.

Quand θ croît de 0 à $+\infty$, il en est de même de r. Le point M (θ, r) tourne indéfiniment autour du pôle en s'éloignant à l'infini et la droite OM ne tend vers aucune limite, la branche infinie que décrit M n'admet pas de direction asymptotique.

Quand θ tend vers zéro, M décrit un arc tangent en O à Ox puisque la droite OM tend vers Ox. D'après la constance de la sous-normale polaire, les normales aux points donnés par les angles polaires $\theta + 2k\pi$, θ étant fixe, concourent au point $N\left(\theta + \frac{\pi}{2}, a\right)$ et les normales aux points qui ont pour angles polaires $\theta + (2k+1)\pi$ concourent au point N' symétrique de N par rapport au pôle.

Comme la spirale hyperbolique représentée par $r\theta = a$, cette courbe a une infinité de points doubles sur Oy, chacun de ces points correspond à deux angles polaires qui diffèrent d'un multiple impair de π et à deux rayons vecteurs opposés.

Toute courbe définie par l'équation (2) est une *spirale d'Archimède* (fig. 52).

REMARQUE. — Les courbes précédentes $r = \frac{a}{\theta}$ et $r = a\theta$ sont inverses dans l'inversion $[O, a^2]$.

51. ***Définition générale des courbes cissoïdales.*** — 1° *Étant donnés dans un plan une droite* D *et un point* O *hors de cette droite, si à tout point* P *du plan on fait correspondre le point* M *tel que,* Q *étant l'intersection des droites* OP *et* D, *on ait* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$, *lorsque le point* P *décrit une courbe* C, *le point* M *décrit une courbe* Γ *dite courbe cissoïdale de* C *relativement au point* O *et à la droite* D.

La transformation est réciproque par les égalités $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{MQ}$ sont équivalentes. Les segments MP et OQ ont même milieu.

Prenons O pour origine, pour axe Ox la perpendiculaire menée de O à D, et pour axe Oy la parallèle menée par O à D.

Soit a l'abscisse de D.

Si l'on connaît une équation polaire

$$r = f(\theta)$$

de la courbe C relativement au pôle O et à l'axe polaire Ox, on obtient immédiatement une équation polaire de la courbe Γ en évaluant $\overline{OM} = \overline{OQ} - \overline{OP}$ dans la direction orientée par l'angle θ; puisque $\overline{OQ} = \frac{a}{\cos\theta}$, $\overline{OP} = f(\theta)$, une équation polaire de Γ est

$$r = \frac{a}{\cos\theta} - f(\theta). \tag{1}$$

REMARQUE. — Les abscisses x et X des points M et P sont liées par $x + X = a$; il en résulte que, quel que soit le paramètre, $dx + dX = 0$. En particulier les points des courbes C et Γ où la tangente est parallèle à la droite D se correspondent dans la transformation cissoïdale.

2° *Cubiques circulaires unicursales.* — *a) Recherche d'une représentation analytique.* Appliquons les résultats précédents au cas où la courbe C est un cercle passant par O si p et q sont les coordonnées de son centre, C a pour équation polaire

$$\overline{OP} = 2p\cos\theta + 2q\sin\theta;$$

et la courbe cissoïdale Γ a pour équation polaire

$$r = \frac{a}{\cos\theta} - (2p\cos\theta + 2q\sin\theta). \tag{2}$$

Nous obtenons aisément l'équation cartésienne à partir de l'équation (2), écrite sous la forme

$$r\cos\theta = a - (2p\cos^2\theta + 2q\sin\theta\cos\theta),$$

en remplaçant $\cos\theta$ et $\sin\theta$ respectivement par $\frac{x}{r}$ et $\frac{y}{r}$, puis r^2 par $x^2 + y^2$, ce qui donne

$$(x - a)(x^2 + y^2) + 2px^2 + 2qxy = 0. \tag{3}$$

la courbe Γ est donc une cubique circulaire unicursale.

On en aurait une représentation paramétrique rationnelle en la coupant par la droite issue de O que représente l'équation $y = tx$,

$$x = a - \frac{2(p + qt)}{1 + t^2}, \qquad y = at - \frac{2(p + qt)t}{1 + t^2}.$$

b) Recherche d'une génération cissoïdale. — Soit Γ une cubique circulaire susceptible, par un choix convenable de l'origine, d'être représentée par une équation cartésienne ne contenant que des termes du troisième et du second degré

$$(tx + my)(x^2 + y^2) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Son équation en coordonnées polaires s'écrit

$$r = \frac{A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta}{l\cos\theta + m\sin\theta},$$

Ajoutons au numérateur $g(\theta)$ de cette fraction la quantité nulle

$$-\lambda(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \lambda$$

et déterminons la constante λ par la condition que

$$h(\theta) = g(\theta) - \lambda(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

contienne le facteur $l\cos\theta + m\sin\theta$, ce qui donne

$$Am^2 - 2Blm + Cl^2 - \lambda(l^2 + m^2) = 0.$$

On peut dès lors écrire $h(\theta)$ sous la forme

$$h(\theta) = (l\cos\theta + m\sin\theta)(p\cos\theta + q\sin\theta),$$

et l'équation polaire de Γ devient

$$r = \frac{\lambda}{l\cos\theta + m\sin\theta} + p\cos\theta + q\sin\theta.$$

La courbe Γ est une courbe cissoïdale du cercle représenté par

$$\rho = -p\cos\theta - q\sin\theta,$$

relativement au pôle et à la droite représentée par l'équation

$$lx + my = \lambda.$$

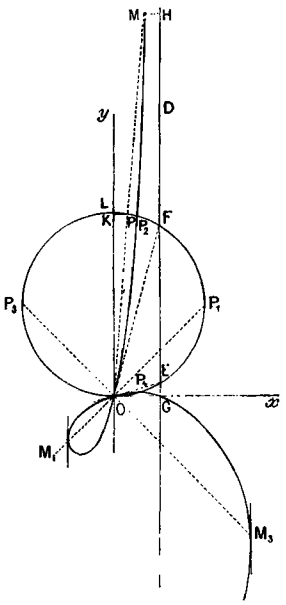


FIG. 53.

c) TRACÉ. — Distinguons trois cas :

I. D *coupe le cercle en deux points réels et distincts* E, F (fig. 53). — Suivons le déplacement de M quand P décrit le cercle. Si P est en l'un des points P_1, P_3 où la tangente au cercle est parallèle à D, M est en M_1 ou M_2 et la tangente à la cubique en chacun de ces points est parallèle à D. Si P vient en E ou en F, M vient en O et la droite OM tend vers OE ou vers OF, ces deux droites sont donc les tangentes en O aux deux arcs de la cubique qui passent en ce point. Si P vient en l'un des points P_2, P_4 équidistants de D et de Oy, M aussi. Si P vient en O, M vient en G sur D. Enfin, si P tend vers le point L commun à Oy et au cercle, la distance PK de P vers Oy tend vers zéro, il en est de même de la distance égale de M à D et comme le point M s'éloigne à l'infini il décrit une branche de courbe asymptote à D.

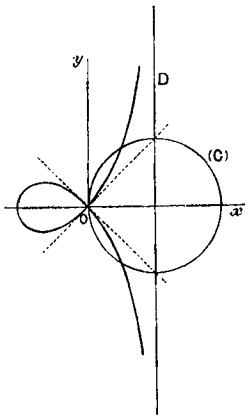


FIG. 54.

CAS PARTICULIERS. — 1° *La droite* D *passe par le centre de* C. — Les tangentes en O sont rectangulaires. On dit que la courbe est une *strophoïde*.

Si, plus particulièrement, la droite D passant par le centre du cercle, le point O est sur le diamètre perpendiculaire à D, la courbe, appelée *strophoïde droite*, admet Ox pour axe de symétrie, ses équations cartésienne et polaire sont respectivement (fig. 54).

$$x(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0, \qquad r = -\frac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}.$$

II. *La droite* D *est tangente au cercle.* — Les deux arcs qui aboutissent au point O sont, dans le voisinage de ce point, de part et d'autre de leur tangente et du même côté de toute autre droite passant par O; le point O est, pour la courbe, un point de rebrousse-

ment de première espèce. Dans le cas considéré, on dit que la courbe Γ est une *cissoïde* (fig. 55). Si le point O est diamétralement opposé au point de contact de D, la courbe est

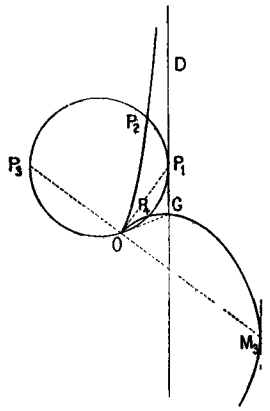


FIG. 55.

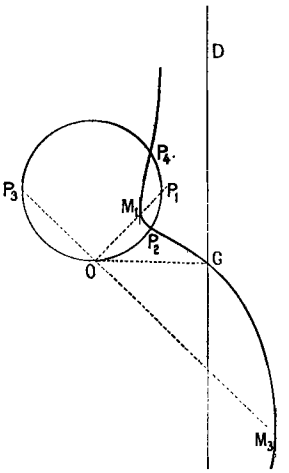


FIG. 56.

symétrique par rapport à Ox, on dit que Γ est une *cissoïde droite* ou *cissoïde de Dioclès*; ses équations cartésienne et polaire sont respectivement

$$x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad r = a\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

III. *La droite* D *ne rencontre pas le cercle.* — **La figure 56 donne le tracé de la courbe.**

52. *Podaires.* 1° DÉFINITION. — On appelle podaire d'une courbe C par rapport à un point O, l'ensemble des pieds des perpendiculaires menées de O aux tangentes à la courbe C.

2° **Représentation analytique d'une podaire.** — *a*) Prenons O pour origine d'un repère orthonormé, et soit

$$\Phi(u, v, h) = 0$$

l'équation tangentielle de C. Soient θ et r un angle polaire et le rayon polaire associé d'un point M du plan; la perpendiculaire en M à OM a pour équation cartésienne

$$x\cos\theta + y\sin\theta - r = 0. \tag{1}$$

Pour que M soit un point de la podaire Γ', il faut et il suffit que cette perpendiculaire soit tangente à C, ce qui s'exprime par

$$\Phi(\cos\theta, \sin\theta, -r) = 0.$$

On obtient ainsi une équation polaire de la podaire. On obtient l'équation cartésienne en observant que, Φ étant homogène, peut encore s'écrire

$$\Phi(r\cos\theta, r\sin\theta, -r^2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Phi[x, y, -(x^2 + y^2)] = 0.$$

b) Si l'on connaît une représentation paramétrique de C, on sait trouver l'équation de la tangente à C en P(λ), et par suite les coordonnées de la projection M de O sur cette tangente.

3° Podaire d'un cercle. — Soit M la projection orthogonale du point O sur la tangente en H au cercle C(A, R) et P la projection orthogonale de A sur OM (fig. 57). P décrit le cercle Σ de diamètre OA, et puisque PM = R, M décrit une conchoïde de Σ par rapport à l'un de ses points, O : la podaire Γ est un limaçon de Pascal.

Analytiquement, en suivant la méthode du 2°, on écrit que la distance de A à la droite d'équation (1) est égale à R, ce qui donne

$$R = |\, a\cos\theta - r\,| \qquad \text{ou} \qquad r = a\cos\theta \pm R.$$

On retrouve l'équation obtenue au n° 49, 3°. La figure 57 montre la construction de la normale à Γ en M, celle-ci joignant M au quatrième sommet du rectangle construit sur O, M, H. Cette construction sera généralisée plus loin (72, 2°).

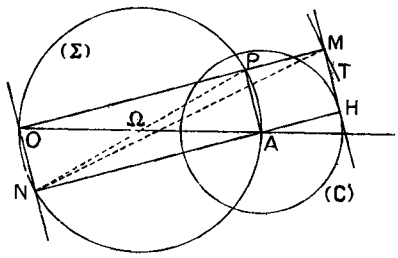


Fig. 57.

4° Podaire d'une parabole. — Proposons-nous d'étudier la podaire par rapport au point O de la parabole qui a pour foyer F et pour tangente au sommet D (fig. 58). Soit M le pied de la perpendiculaire menée de O à la droite T tangente à la parabole. Le point P, pied de la perpendiculaire menée du foyer sur T, est sur la tangente au sommet. La translation $\overrightarrow{FO}$ amène P en P′ sur la droite D′ déduite de D et O en A, les vecteurs $\overrightarrow{FP}$ et $\overrightarrow{OP'}$ sont équipollents. Soit Q la projection orthogonale de F sur la droite OM, Q est sur le cercle qui a pour diamètre FO et son symétrique Q′ par rapport à O est sur le cercle C qui a OA pour diamètre. En retranchant membre à membre les égalités

$$\overline{OQ'} = \overline{QO}, \qquad \overline{OP'} = \overline{QM}$$

on trouve $\overline{P'Q'} = \overline{MO}$, ce qui prouve que M décrit la courbe cissoïdale du cercle C relativement au point O et à la droite D′. Cette courbe est une strophoïde si O est sur la directrice et une cissoïde si O est sur la parabole.

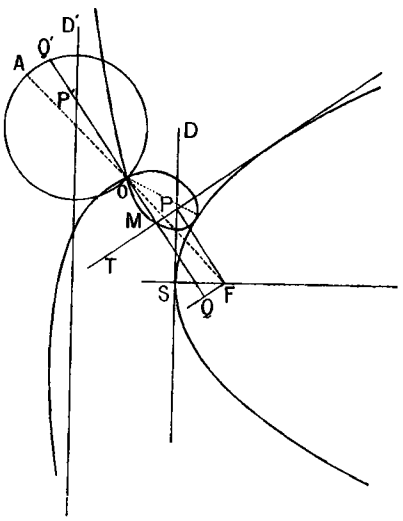


Fig. 58.

La figure 58 montre que, réciproquement, étant donnée une courbe cissoïdale d'un cercle C relativement à un point O du cercle, lorsque M décrit cette courbe, la perpendiculaire en M à OM enveloppe une parabole dont le foyer s'obtient en construisant le symétrique par rapport à O du point diamétralement opposé à O sur le cercle C.

Le lecteur pourra former l'équation polaire de la podaire de la parabole en prenant comme origine le foyer de la parabole et choisissant les axes de façon que $x = \frac{p}{2}$ soit l'équation de la tangente au sommet. L'équation d'une tangente à la parabole peut s'écrire

$$x\cos\theta + y\sin\theta - \frac{p}{2\cos\theta} = 0$$

et la podaire par rapport au point O (a, b) a pour équation polaire, O étant le pôle,

$$r = \frac{p}{2\cos\theta} - a\cos\theta - b\sin\theta.$$

EXERCICES

1. — Construire les courbes admettant pour équations polaires

$$r = af(\theta) \text{ et } r = \frac{a}{f(\theta)},$$

$f(\theta)$ étant l'une des fonctions suivantes :

$$\sin n\theta, \quad \cos n\theta, \quad \operatorname{tg} n\theta \quad \left(n = 1, 2, 3, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{\cos p\theta}{\cos q\theta}, \quad \frac{\cos p\theta}{\sin q\theta} \quad \left(p = 2, q = 3; p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{g(\theta)}{h(\theta)} \begin{cases} g(\theta) = \sin\theta, \quad \sin 2\theta, \quad \sin^2\theta, \quad \operatorname{tg}\theta \\ h(\theta) = \sin\theta - \cos\theta, \quad 2\cos\theta - 1, \quad 1 + 2\cos 2\theta \end{cases}$$

$$\sqrt{1 + \sin 2\theta} + \sqrt{1 - \sin 2\theta}; \qquad \cos 2\theta + \sin 2\theta.$$

2. — Construire la courbe admettant pour équation polaire $r = af(\theta)$, $f(\theta)$ étant l'une des fonctions suivantes :

$$1 - 2\sin 2\theta; \quad 1 + 2\sin\frac{\theta}{2}; \quad \cos\theta\cos 2\theta; \quad 1 - \operatorname{tg}\frac{\theta}{3}; \quad 1 + 3\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1 + 2\cos\theta}{1 + 2\sin\theta}; \quad \frac{1}{1 + \cos 3\theta}; \quad \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta\cos 2\theta}; \quad \frac{1}{\sin\theta - \sin 2\theta}$$

$$\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \cos\frac{\theta}{2}\right)}; \quad \frac{4\sin^2\theta + 3\cos\theta}{\cos 2\theta}; \quad \frac{\sin^2 2\theta}{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)}; \quad \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}}; \quad 1 + \frac{1}{1 + \cos\theta + \sin\theta}$$

$$\frac{\theta^2}{\theta^2 - \frac{\pi^2}{9}}; \quad \frac{\theta - 1}{\theta + 1}; \quad \operatorname{th}\frac{\theta}{2}; \quad \frac{\operatorname{ch}(\theta + 1)}{\operatorname{ch}\theta}; \quad \operatorname{Log}(1 + \sin\theta); \quad e^{\frac{2}{\sin\theta}}$$

$$(1 + \operatorname{tg}\theta)^{\frac{2}{3}} + (1 - \operatorname{tg}\theta)^{\frac{2}{3}}.$$

3. — Construire les courbes admettant pour équation polaire $r^2 = a^2 f(\theta)$, $f(\theta)$ étant l'une des fonctions suivantes

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}; \quad \frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos 2\theta}; \quad 1 - \operatorname{tg} 2\theta; \quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}; \quad \frac{\sin\theta}{2 + \cos\theta}.$$

4. — Construire les courbes admettant pour équation polaire

$$r^2\cos\theta - 2ar + 4a^2\sin\theta = 0; \quad r^2\cos\theta - 2ar\cos 2\theta + a^2\cos\theta = 0$$

$$(r^2 + a^2)\cos 2\theta - 2ar = 0;$$

$$r^2 - 2\theta r + 1 = 0; \quad \theta = r(r + 1)(r + 2); \quad \theta^2 = r(2 - r)$$

$$\sin\theta = r^3 - 3r + 1; \quad \sin\theta = \frac{r^2 - 3r}{r + 1}; \quad \cos\theta = \frac{3r^2}{2r^3 + 1}.$$

5. — Construire, en utilisant les coordonnées polaires, la courbe représentée par

$$x = \frac{1 - u}{1 + u^4}, \qquad y = u^2 x.$$

6. — Construire les courbes définies en coordonnées polaires par les représentations paramétriques

$$\begin{cases} \theta = 2u - \operatorname{tg} u \\ r = \operatorname{tg} u \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = u - 2\sin u \\ r = \operatorname{tg} u \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = u + \frac{1}{u} \\ r = u^2 - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = \operatorname{th} u \\ r = \frac{u}{\operatorname{sh} u}. \end{cases}$$

7. — Étudier, suivant les valeurs de λ, la forme des courbes

$$(C_\lambda) \qquad \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta = \lambda.$$

*Déterminer les trajectoires sous l'angle α, et en particuller les trajectoires orthogonales, des courbes (C_λ).

8. — Construire les dlverses formes des courbes définies par

$$r = a\sin 2\theta + \lambda; \qquad r = \frac{a}{1 - \lambda\cos 2\theta}$$

quand λ varie.

9. — Étudier les dlverses formes que peut présenter une conchoïde de droite.

10. — Quel est le nombre de points d'lnflexlon de la courbe d'équation polaire $\frac{1}{r} = \cos n\theta + a\cos\theta + b\sin\theta$? Démontrer que ces points sont en llgne drolte.

11. — Asymptotes de la courbe

$$r^n(a\cos n\theta + b\sin n\theta) = 1 \qquad (n \text{ entier naturel}).$$

12. — Soit P et Q deux polnts dlamétralement opposés sur une hyperbole équilatère H. Démontrer que le cercle de centre P, de rayon PQ, recoupe H aux trois sommets d'un triangle équilatéral.

13. — Solt H une hyperbole d'excentrlcité 2. Démontrer que tout cercle passant par un sommet S et par le foyer O le plus éloigné de S recoupe H aux sommets d'un trlangle équllatéral.

14. Former l'équation polalre générale des cercles passant par le pôle et tangents à la cardioïde dont une équatlon est $r = a(1 + \cos\theta)$.

15. Étudier la famille des cardloïdes définies en coordonnées polaires par l'équation

$$r = \frac{a}{\sin\lambda}[1 - \cos(\theta - \lambda)].$$

Trouver les polnts communs aux courbes qul correspondent à deux valeurs α et β du paramètre λ.

16. Trouver le lieu géométrique de l'lntersection des tangentes ou des normales à une cardioïde en des points allgnés avec le point de rebroussement.

17. — On peut mener à une cardloïde C trois tangentes parallèles à une directlon donnée (l). Étudier, quand (l) varle, l'alre du triangle dont les sommets sont les trols points de contact de ces tangentes, alnsl que le centre de gravité de ce triangle.

18. — La tangente au point M d'une cardloïde C recoupe la courbe en U et V. Lleu, quand M décrit C, du polnt d'intersection des tangentes à C en U et V.

19. — Podalre d'une splrale logarithmique par rapport à son point asymptote.

20. — Lleu des pieds des normales menées par un point fixe à une splrale logarlthmique de grandeur constante qul tourne autour de son polnt asymptote.

21. — Construire la courbe qui admet pour équatlon polalre $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$. Les tangentes en trois points allgnés avec le pôle forment un triangle équllatéral. Trouver le lieu du centre de gravité de ce triangle.

22. — Construlre la courbe C qui admet pour équatlon $r = a\frac{\sin 2\theta}{\theta}$.

Montrer que les tangentes aux points de C situés sur une demi-drolte Δ d'orlgine O ont un point commun P. Construire le lieu de P quand Δ varie.

23. — Lleu, quand λ varie, des points de contact des tangentes à

$$(C_\lambda) \qquad r = \frac{\lambda}{1 + e\cos\theta} \qquad (e \text{ fixe})$$

menées par un point donné de l'axe polaire.

24. — Lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à l'une des courbes

$$a)\ r = ae^{m\theta};\quad b)\ r = \frac{p}{1 + e\cos\theta};\quad c)\ r = a(1 + \cos\theta).$$

25. — Démontrer que la courbe représentée par

$$r = a\sin\frac{\theta}{3}$$

est un limaçon de Pascal.

26. — Lieu des milieux des cordes d'un limaçon de Pascal vues du point double sous un angle droit.

27. — A quelle condition le limaçon de Pascal d'équation polaire $r = a(\cos\theta + \lambda)$ a-t-il des points d'inflexion? Déterminer le lieu géométrique de ces points lorsque λ varie.

28. — Démontrer que si chacune des tangentes au point double d'un limaçon de Pascal Γ fait avec l'axe de Γ un angle de 60°, il existe une infinité d'hexagones dont les sommets sont sur Γ et dont les droites qui portent les côtés sont tangentes à Γ.

29. — On donne deux points A et I; soit Γ la courbe lieu géométrique des points M tels que $2\,MI \pm MA = 2\,AI$. Soit O celui des points d'intersection de Γ et de la droite AI qui est le plus voisin de I. Former l'équation polaire de Γ dans un repère polaire de pôle O puis de pôle A, puis de pôle I (l'axe polaire étant AI). Identifier Γ.

30. — Le lieu du point d'intersection de deux droites perpendiculaires D et D' qui varient en restant respectivement tangentes à deux cercles donnés, égaux, C et C', est un limaçon de Pascal.

*31. — Lieu Γ_λ des points dont le produit des distances aux quatre sommets d'un carré donné est une constante donnée λ^4. Étudier la déformation de Γ_λ quand λ varie. Trouver les trajectoires orthogonales des courbes Γ_λ.

32. — Un cercle C de rayon a donné est tangent à une droite donnée Δ en un point variable de cette droite; lieu du point de contact de la tangente variable à C menée d'un point fixe O de Δ.

33. — On donne un cercle C (Ω, a) et un point fixe A; une sécante variable $A\delta$ issue de A coupe C en deux points P et P'.

a) Lieu de l'orthocentre du triangle $\Omega PP'$.

b) O étant un point commun à C et à la droite ΩA, les bissectrices de $\widehat{POP'}$ coupent la sécante $A\delta$ en M et M'; lieu de M et M'.

34. — On considère la famille des cercles C tangents aux axes rectangulaires Ox, Oy et centrés sur la première bissectrice;

a) lieu des points de contact des cercles C et des cercles tangents à Ox en un point donné A;

b) lieu du second point commun à un cercle C et à la droite joignant un point donné A de Ox au point de contact de C et de Oy.

CHAPITRE VI

COURBES REPRÉSENTÉES PAR UNE ÉQUATION $f(x, y) = 0$.

I. GÉNÉRALITÉS

53. *Point ordinaire. Point singulier.* — 1° **Rappels.** — Soit f une fonction réelle des variables réelles x, y définie, continue, et admettant des dérivées partielles du premier ordre continues sur un champ rectangulaire $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^2$.

Si (x_0, y_0) est un point de $\mathcal{C}$ tel que

$$f(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

on peut trouver (II, n° 151) un voisinage $\mathfrak{I}$ de x_0 tel qu'il existe une fonction $\varphi(x)$, continue et dérivable sur $\mathfrak{I}$, vérifiant

$$f[x, \varphi(x)] = 0, \qquad \forall x \in \mathfrak{I}; \qquad y_0 = \varphi(x_0).$$

La dérivée $\varphi'(x)$ est donnée par

$$f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\, \varphi'(x) = 0;$$

elle est donc continue en tout point de $\mathfrak{I}$.

En d'autres termes, le plan géométrique étant rapporté au repère $S\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, il existe un arc simple continûment dérivable passant par le point $M_0(x_0, y_0)$ et vérifiant l'équation

(1) $$f(x, y) = 0.$$

Si $$f'_y(x_0, y_0) = 0, \text{ mais si } f'_x(x_0, y_0) \neq 0,$$

on arrive au même résultat avec une fonction $\psi(y)$.

Si $$f'_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

on ne peut énoncer un résultat général.

Nous n'envisagerons dans ce qui suit que les cas où l'équation (1) définit un ensemble d'arcs simples continûment dérivables; nous appellerons courbe Γ définie par l'équation (1) la réunion de tous ces arcs.

2° **Définitions.** — $M_0(x_0, y_0)$ **étant un point de la courbe** Γ

$$[\text{donc } f(x_0, y_0) = 0],$$

M_0 est dit ordinaire (ou régulier) si $f'_x(x_0, y_0)$ **et** $f'_y(x_0, y_0)$ **ne sont pas simultanément nuls;**

M_0 est dit singulier si $f'_x(x_0, y_0) = 0$, **et** $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Les notions précédentes ne dépendent pas du repère utilisé; soit $S_1\left(O_1, \vec{I}, \vec{J}\right)$ un nouveau repère :

$$\begin{cases} x = x_1 + aX + a'Y \\ y = y_1 + bX + b'Y \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$f(x, y) = F(X, Y) \Longrightarrow \begin{vmatrix} F'_X = a f'_x + b f'_y \\ F'_Y = a' f'_x + b' f'_y. \end{vmatrix}$$

On en déduit immédiatement que si M_0 est singulier dans un des repères S ou S_1, il l'est aussi dans l'autre. Il en résulte que si M_0 est ordinaire dans l'un de ces repères, il l'est aussi dans l'autre.

Remarque I. — Pour une fonction f arbitrairement choisie, un point singulier doit vérifier les 3 équations

$$f(x, y) = 0, \qquad f'_x(x, y) = 0, \qquad f'_y(x, y) = 0;$$

en général, ces 3 équations n'ont pas de solution commune x, y, et Γ n'admet pas de point singulier.

Mais il peut arriver, pour une fonction bien choisie, que tous les points de Γ soient singuliers; par exemple

$$g(x, y) = [f(x, y)]^2 \Longrightarrow g'_x = 2 f f'_x \qquad \text{et} \qquad g'_y = 2 f f'_y.$$

En tout point où g est nul, g'_x et g'_y sont nuls.

Nous écarterons de tels exemples dans la suite.

Remarque II. — Dans la notation d'une dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables $f(x, y)$, on indique

a) par un accent, l'ordre de la dérivée,

b) par un indice, la variable par rapport à laquelle on dérive,

c) par un symbole entre parenthèses, le point où l'on considère cette dérivée partielle.

Ainsi $f'_y(A)$ ou $f'_y(a, b)$ est la dérivée partielle première, par rapport à y, de la fonction f au point A, de coordonnées a, b.

Pour des raisons de commodité, on désigne souvent, en géométrie analytique, par f'_x et f'_y les valeurs prises par les dérivées partielles pour le point générique x, y de l'ensemble étudié. Par abus d'écriture, si on particularise un point de l'ensemble en affectant d'un indice les coordonnées du point générique (x_0, y_0, par exemple), on pourra écrire

f'_{x_0} au lieu de $f'_x(x_0, y_0)$; f'_{y_0} au lieu de $f'_y(x_0, y_0)$.

3° **Tangente en un point ordinaire.** — Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point ordinaire de la courbe Γ; soit u un paramètre fixant de façon propre la position d'un point de l'arc simple continûment dérivable γ de Γ passant

par M_0 (ce pourra être x, ou y, comme on a vu au 1°). Il existe un intervalle $\mathfrak{I}$ tel que

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \varphi(u) \\ y = \psi(u) \end{cases} \qquad f[\varphi(u), \psi(u)] = 0 \qquad \forall u \in \mathfrak{I},$$

avec $x_0 = \varphi(u_0), \quad y_0 = \psi(u_0) \quad u_0 \in \mathfrak{I}.$

$$(2) \Longrightarrow f'_x[\varphi, \psi]\varphi'(u) + f'_y[\varphi, \psi]\psi'(u) = 0 \qquad \forall u \in \mathfrak{I}$$

et en particulier, pour u_0,

$$(3) \qquad f'_x(x_0, y_0)\,\varphi'(u_0) + f'_y(x_0, y_0)\,\psi'(u_0) = 0.$$

Le vecteur $\vec{v}[\varphi'(u_0), \psi'(u_0)]$ dirige la tangente en M_0 à γ; on peut supposer $\vec{v} \neq \vec{0}$, par exemple en prenant pour u soit x, soit y. Si x, y est le point générique de la tangente en M_0 à γ, $x - x_0$, $y - y_0$ est aussi un vecteur directeur de cette tangente, et (3) entraîne

$$(4) \qquad (x - x_0)\,f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\,f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Telle est l'équation de la tangente en M_0 à Γ.

En appelant X et Y les coordonnées du point générique de la tangente, on retiendra l'équation de la tangente sous la forme

$$\boxed{(X - x)\,f'_x(x, y) + (Y - y)\,f'_y(x, y) = 0.}$$

Si le repère est orthonormé, le vecteur f'_x, f'_y, qui est alors $\overrightarrow{\text{grad}}\ f$ (n° 185), dirige la normale en $M(x, y)$ à Γ; cette normale a pour équation

$$\frac{X - x}{f'_x(x, y)} = \frac{Y - y}{f'_y(x, y)}.$$

4° **Propriété caractéristique de la tangente en un point ordinaire.** — Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point ordinaire de la courbe Γ représentée par l'équation $f(x, y) = 0$; les coordonnées d'un point de la droite D issue de M_0 et qui admet a et b pour paramètres directeurs peuvent se mettre sous la forme $x_0 + a\rho$, $y_0 + b\rho$; l'équation aux ρ des points communs à Γ et à D est

$$f(x_0 + a\rho, y_0 + b\rho) = 0.$$

$\rho = 0$ est racine de cette équation; pour que cette racine soit multiple, il faut et il suffit qu'elle annule aussi la dérivée du premier membre par rapport à ρ, c'est-à-dire que

$$af'_x(x_0, y_0) + bf'_y(x_0, y_0) = 0.$$

On reconnaît dans cette relation celle qui exprime que D est la tangente en M_0 à Γ.

La tangente en un point ordinaire de la courbe Γ est donc caractérisée par le fait qu'elle coupe Γ en deux points au moins confondus avec le point considéré. Observons en outre que toute droite passant par un point singulier de Γ coupe Γ en deux points au moins confondus avec ce point singulier.

54. ***Étude locale d'une courbe représentée par une équation*** $f(x, y) = 0$. — 1° La courbe Γ passe par l'origine O si, et seulement si, $f(0,0) = 0$.

Supposons la fonction f pourvue de dérivées partielles continues d'ordres successifs sur un pavé fermé contenant O; on peut alors écrire un développement limité de $f(x, y)$ par la formule de Taylor (ou par tout autre procédé) au voisinage du point O; par exemple

$$(1) \qquad f(x, y) = ax + by + \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + H(x, y)$$

$H(x, y)$ est un infiniment petit d'ordre 3 au moins par rapport à la norme euclidienne $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

$$a = f'_x(0, 0), \qquad b = f'_y(0, 0).$$

L'origine est un point ordinaire [resp. un point singulier] **pour** Γ **si la partie régulière du développement limité de** $f(x, y)$ **est du premier degré** [resp. de degré au moins égal à deux].

2° **Point ordinaire à l'origine.** — I. Si a et b ne sont pas nuls tous deux, l'origine est un point ordinaire et la tangente en ce point a pour équation

$$(x - 0)f'_x(0, 0) + (y - 0)f'_y(0, 0) = 0$$

c'est-à-dire

$$ax + by = 0.$$

En égalant à zéro l'ensemble des termes du premier degré dans le développement limité de $f(x, y)$, **on obtient l'équation de la tangente en** O.

II. Si a et b sont différents de 0 l'un et l'autre, et si x et y sont les coordonnées d'un point M de Γ sur l'arc simple continûment dérivable qui passe en O,

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{a}{b},$$

en d'autres termes, si x tend vers 0,

$$y \sim -\frac{a}{b}x.$$

On peut donc comparer les signes de x et de y sur cet arc.

III. — Supposons $a = 0$ et $b \neq 0$; Γ est tangente en O à Ox, et la seule considération de la tangente ne permet pas de trouver le signe de y.

Écrivons l'égalité (1) sous la forme

$$(by + \alpha x^2) + [2\beta xy + \gamma y^2 + H(x, y)] = 0.$$

y est un infiniment petit d'ordre supérieur à x, il en résulte que le crochet est un infiniment petit d'ordre supérieur à x^2, et enfin la parenthèse est aussi un infiniment petit d'ordre supérieur à x^2, ce qui exige

$$y \sim -\frac{\alpha}{b}x^2,$$

et par suite donne le signe de y.

Si $a \neq 0$ et $b = 0$, on transpose le rôle des axes et celui de x et y.

3° **Position de la courbe par rapport à la tangente en** O. — Si cette tangente est Ox ou Oy, l'étude du 2°, III fournit la réponse.

Si cette tangente est distincte des axes, on opère de la façon suivante : si le point M(x, y) de Γ tend vers O, le coefficient directeur $\frac{y}{x}$ de la droite OM tend vers $-\frac{a}{b}$; en d'autres termes, si l'on pose

$$\frac{y}{x} = -\frac{a}{b} + u, \qquad \lim_{x \to 0} u = 0.$$

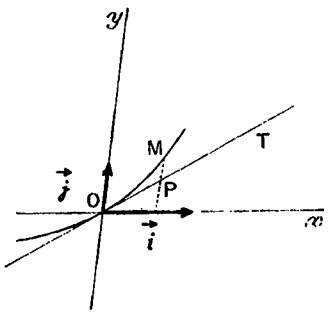


FIG. 59.

Si l'on écrit

$$y = -\frac{a}{b}x + ux,$$

on reconnaît que ux est l'excès de l'ordonnée de M sur l'ordonnée du point P qui a pour abscisse x et appartient à la tangente. L'équation

$$f\left[x, -\frac{a}{b}x + ux\right] = 0$$

représente une courbe Γ_1 qui passe par l'origine O_1 d'un plan rapporté à deux axes O_1x, O_1u ; on cherche avec quel signe u tend vers zéro lorsque x tend vers zéro. Cette étude peut se faire sur le développement limité (1).

4° **Point singulier à l'origine.** — Nous admettrons les résultats suivants. Si a et b sont nuls tous deux, et si l'équation

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 0 \tag{2}$$

représente deux droites réelles distinctes ($\alpha\gamma - \beta^2 < 0$), Γ possède un arc simple continûment dérivable tangent en O à chacune de ces deux droites.

Si $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$, aucun arc réel de Γ ne passe en O, O est un point isolé de Γ.

Si $\alpha\gamma - \beta^2 = 0$, l'équation (2) représente une droite double, et on ne peut rien affirmer sur l'existence d'arcs réels de Γ aboutissant en O tangentiellement à cette droite double.

5° **Applications.** — L'étude précédente s'applique en particulier si $f(x, y)$ est un polynôme à coefficients réels ; en l'ordonnant suivant les puissances croissantes de x et y, on obtient un développement limité sur lequel on retrouvera les résultats précédents.

55. ***Contact de deux courbes.*** — Nous nous bornerons à examiner le cas où l'une des deux courbes est donnée par une équation cartésienne, l'autre, par une représentation paramétrique.

Soit $\Gamma : (1)\ f(x, y) = 0$; $\Gamma_1 : x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \qquad (2)$

la représentation étant propre.

Pour qu'un point donné $M(x, y)$ soit un point de contact pour Γ et Γ_1, il faut que :

a) x et y vérifient (1);

b) il existe une valeur u vérifiant (2);

c) cette valeur u vérifie

$$\varphi'(u)f'_x(x, y) + \psi'(u)f'_y(x, y) = 0 \tag{3}$$

qui exprime la coïncidence des tangentes si M n'est pas singulier pour Γ et n'est pas stationnaire pour Γ_1.

Si le point M n'est plus imposé, les conditions (1), (2), (3) se réduisent à l'existence d'une valeur u telle que

$$\mathcal{F}(u) = 0, \qquad \mathcal{F}'(u) = 0, \tag{4} \qquad (5)$$

avec $\mathcal{F}(u) = f[\varphi(u), \quad \psi(u)]$

et par suite $\mathcal{F}'(u) = \varphi'(u).f'_x[\varphi(u), \psi(u)] + \psi'(u).f'_y[\varphi(u), \psi(u)]$.

L'équation (4) est l'équation aux u des points communs à Γ et Γ_1; l'existence d'une valeur u vérifiant (4) et (5) exprime l'existence d'une racine multiple pour l'équation (4).

En résumé, *pour que les courbes* Γ *et* Γ_1 *soient tangentes, il faut que l'équation aux u des points communs à* Γ *et* Γ_1 *ait une racine multiple.*

On est en mesure d'affirmer que la condition est suffisante si on peut vérifier que le point M obtenu n'est pas singulier pour Γ, et n'est pas stationnaire pour Γ_1.

II. ÉQUATION TANGENTIELLE D'UNE COURBE PLANE

56. ***Courbe de la complétion projective d'un plan affine.*** — Dans ce sous-chapitre, nous désignons par $\mathfrak{L}$ la complétion projective du plan affine réel $\mathcal{E}$; $\mathfrak{L}$ est la réunion de $\mathcal{E}$ et d'une *droite à l'infini*, $\infty_{\mathcal{E}}$. Les points de $\mathcal{E}$ sont dits « points à distance finie » de $\mathfrak{L}$.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère de $\mathcal{E}$, choisi une fois pour toutes. Le point générique de $\mathcal{E}$ a pour coordonnées cartésiennes (x, y) et pour coordonnées homogènes (X, Y, T) tels que

$$x = \frac{X}{T} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{Y}{T}.$$

Les points de $\infty_{\mathcal{E}}$ sont caractérisés par $T = 0$.

1° **Notion de courbe de** $\mathfrak{L}$. — Soit F(X, Y, T) une fonction de trois variables réelles, homogène et de degré $n \neq 0$, continue et à dérivées partielles continues.

Nous appellerons courbe la partie Γ de $\mathfrak{P}$ formée par les points M dont un système de coordonnées homogènes vérifie

$$F(X, Y, T) = 0, \tag{1}$$

ce qui implique que tout système de coordonnées homogènes de M vérifie (1).

Le choix de cette définition s'explique par le fait que l'égalité

$$F(X, Y, T) = T^n f\left(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}\right) \tag{2}$$

montre que la restriction de Γ à l'espace affine $\mathfrak{E}$ n'est autre que la courbe de $\mathfrak{E}$ représentée par l'équation

$$f(x, y) = 0; \tag{3}$$

nous utillserons encore le symbole Γ pour désigner cette restriction.

2° **Complétion projective d'une courbe de $\mathfrak{E}$.** — Inversement, à partir de la courbe Γ de $\mathfrak{E}$ déterminée par (3), on construit la fonction homogène F(X, Y, T) au moyen de la formule (2), dans laquelle n désigne un réel non nul arbitralrement choisi (ce qui risque, cependant, d'introduire la droite à l'infini comme *solution étrangère*); enfin on désigne par *complétion projective de* Γ la courbe de $\mathfrak{P}$ qui est représentée par (1); on utilise encore la notation Γ pour désigner cette complétion.

3° **Étude d'une courbe de $\mathfrak{P}$.** — Nous reprenons la courbe Γ de $\mathfrak{P}$ considérée au 1° et nous nous proposons d'étendre aux points à l'infini certains résultats déjà connus en ce qui concerne les points à distance finie.

Point singulier. — En dérivant l'égalité (2) nous avons

$$\begin{cases} F'_X(X, Y, T) = T^{n-1} f'_x(x, y) \\ F'_Y(X, Y, T) = T^{n-1} f'_y(x, y) \end{cases} \tag{2'}$$

Nous connaissons, par ailleurs, l'égalité d'Euler

$$XF'_X + YF'_Y + TF'_T = nF. \tag{4}$$

Un point à distance finie, M(x, y), est point singulier de Γ sl, et seulement si,

$$f(x, y) = 0; \qquad f'_x(x, y) = 0; \qquad f'_y(x, y) = 0.$$

Compte tenu de $T \neq 0$, d'après (2') et (4), cette condition s'écrit

$$F'_X(X, Y, T) = 0, \qquad F'_Y(X, Y, T) = 0, \qquad F'_T(X, Y, T) = 0. \tag{5}$$

On étend ce résultat au cas d'un point à l'infini par la convention suivante :

Dans le plan projectif $\mathfrak{P}$, un point M *de la courbe* Γ *représentée par*

$$F(X, Y, T) = 0$$

est ordinaire si l'une au moins des trois dérivées partielles de F(X, Y, T) *n'est pas nulle en* M; *le point est singulier dans le cas contraire.*

Tangente en un point ordinaire. — Si l'on écrit en coordonnées homogènes l'équation de la tangente en $M_0\left(x_0 = \frac{X_0}{T_0},\ y_0 = \frac{Y_0}{T_0}\right)$, à distance finie [formule (4) du n° 53], on obtient

$$\left(\frac{X}{T} - \frac{X_0}{T_0}\right) F'_X(X_0, Y_0, T_0) + \left(\frac{Y}{T} - \frac{Y_0}{T_0}\right) F'_Y(X_0, Y_0, T_0) = 0,$$

ou
$$XF'_X(X_0, Y_0, T_0) + YF'_Y(X_0, Y_0, T_0) - \frac{T}{T_0} H = 0$$

$$H = X_0F'_X(X_0, Y_0, T_0) + Y_0F'_Y(X_0, Y_0, T_0) = -T_0F'_T(X_0, Y_0, T_0)$$

d'après la relation d'Euler, puisque $F(X_0, Y_0, T_0) = 0$. Finalement l'équation de la tangente en M_0 s'écrit

$$(6) \qquad \boxed{XF'_X(X_0, Y_0, T_0) + YF'_Y(X_0, Y_0, T_0) + TF'_T(X_0, Y_0, T_0) = 0}$$

les coefficients de X, Y, T n'étant pas nuls tous les trois.

On étend, par convention, la validité de l'équation (6) dans le cas où M_0 est un point ordinaire à l'infini.

TANGENTES MENÉES PAR UN POINT DONNÉ. — En transposant M et M_0 dans l'équation (6) on constate que, $M_0(x_0, y_0, t_0)$ étant donné, le système

$$(7) \quad F(X, Y, T) = 0 \quad \text{et} \quad x_0F'_X(X, Y, T) + y_0F'_Y(X, Y, T) + t_0F'_T(X, Y, T) = 0$$

traduit une condition nécessaire et suffisante pour que M(X, Y, T) soit : ou bien un point singulier de Γ, ou bien un point ordinaire de Γ en lequel la tangente passe par M_0.

En particulier, pour $t_0 = 0$, le système (7) fournit les points singuliers de Γ et les points de Γ en lesquels la tangente a la direction du vecteur donné $\vec{V}(\alpha = x_0, \beta = y_0)$.

57. *Équation tangentielle d'une courbe représentée par une équation f(x, y) = 0.* — 1° Reprenons (56, 2°) la complétion projective Γ de la courbe donnée; l'équation homogène associée est

$$F(X, Y, T) = 0 \qquad (1)$$

La droite D, de coordonnées tangentielles (u, v, h) est tangente à Γ, en un point à distance finie ou en un point à l'infini, si et seulement s'il existe x, y, t vérifiant (1), et tels que la tangente en ce point à Γ coïncide avec D.

$$\left.\begin{array}{r} D(u, v, h) \\ \text{tangente à } \Gamma \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{ll} F(x, y, t) = 0 & (2) \\ \exists\ x, y, t \text{ tels que } \dfrac{F'_x}{u} = \dfrac{F'_y}{v} = \dfrac{F'_t}{h} & (3) \end{array}\right.$$

$$(x, y, t) \text{ non singulier pour } \Gamma.$$

Or
$$(2) \iff xF'_x + yF'_y + tF'_t = 0 \qquad (4)$$
$$(3) \text{ et } (4) \implies ux + vy + ht = 0 \qquad (5)$$

Inversement (3) et (5) $\implies$ (4) $\implies$ (2).

En résumé,

pour que la droite $D(u, v, h)$ *soit tangente à la courbe* Γ $[F(X, Y, T) = 0]$, *il faut et il suffit que* u, v, h *vérifient l'équation* $\Phi(u, v, h) = 0$ (6) *formée en éliminant* x, y, t *entre les équations*

$$ux + vy + ht = 0, \qquad \frac{F'_x}{u} = \frac{F'_y}{v} = \frac{F'_t}{h}.$$

L'équation (6) est dite *équation tangentielle* de Γ.

REMARQUE I. — Si (x_0, y_0, t_0) est un point singulier de Γ, $ux_0 + vy_0 + ht_0 = 0$ est une solution particulière du problème de l'élimination de x, y, t entre les équations (3) et (5); il convient de l'écarter.

REMARQUE II. — Si l'élimination de x, y, t entre (2) et (4) conduisait à deux relations entre u, v, h, c'est que la courbe Γ serait formée de droites.

2° Nous avons vu au n° 53, 4° que la tangente en un point ordinaire M_0 (à distance finie) est caractérisée par le fait qu'elle coupe Γ en deux points au moins confondus avec M_0.

Par suite, pour exprimer que la droite D représentée par l'équation $ux + vy + h = 0$ est tangente à Γ (en un point à distance finie), il suffit d'écrire que l'équation aux abscisses ou aux ordonnées des points communs à Γ et D a une racine double, ou encore qu'il en est ainsi pour l'équation aux coefficients directeurs des droites qui joignent l'origine aux points communs à Γ et D.

EXEMPLE. — Soit à trouver l'équation tangentielle de la cissoïde Γ :

$$x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0.$$

Le faisceau des droites joignant O aux points communs à Γ et à $D(ux + vy + h = 0)$ est

$$hx(x^2 + y^2) + ay^2(ux + vy) = 0.$$

Écrivons que deux de ces droites sont confondues : en posant $\frac{x}{y} = t$, on a l'équation

$$t^3 + \frac{h + au}{h}t + \frac{av}{h} = 0, \qquad h \neq 0$$

qui n'admet une racine double que si

$$4(h + au)^3 + 27\, a^2v^2h = 0.$$

3° APPLICATION. — Les coordonnées tangentielles des tangentes à Γ menées par le point donné $M_0(x_0, y_0, t_0)$ sont fournies par le système des deux équations

$$\Phi(u, v, h) = 0 \qquad ux_0 + vy_0 + ht_0 = 0,$$

que l'on obtient en écrivant qu'il s'agit des droites de $\mathfrak{F}$ qui, d'une part sont tangentes à Γ, d'autre part passent par M_0.

En particulier, si M_0 est à distance finie, on peut repérer une droite qui passe par M_0 par son équation

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

c'est-à-dire par ses coordonnées tangentielles $(m, -1, y_0 - mx_0)$.

L'équation aux coefficients directeurs des tangentes à Γ issues de M_0 est donc :

$$\Phi(m, -1, y_0 - mx_0) = 0.$$

58*. ***Courbes algébriques.*** — Nous nous limiterons à donner quelques notions sur une question qui ne figure plus au programme des classes de Mathématiques Spéciales.

1° **Définition ; ordre.** — Initialement $\mathfrak{L}_C$ désigne le plan projectif complexe le plus général. On appelle *courbe algébrique* la partie Γ de $\mathfrak{L}_C$ formée par les points M dont un système (et, par suite, tout système) de coordonnées homogènes, dans un repère donné $\mathfrak{R}$, vérifie l'équation

$$F(X, Y, T) = 0, \tag{1}$$

dans laquelle F(X, Y, T) désigne un polynôme homogène à trois indéterminées, sur le corps des complexes, dont nous désignerons le degré par n.

On obtient une équation de Γ dans un second repère $\mathfrak{R}'$ en utilisant les formules de changement de coordonnées, qui sont linéaires, soit

$$G(X', Y', T') = 0 \quad \text{avec} \quad G(X', Y', T') = F(aX' + bY' + cT', \ldots, \ldots).$$

Il en résulte que G ne peut être que soit le polynôme nul, soit un polynôme homogène de degré n. La première hypothèse est exclue car elle entraînerait, en revenant de $\mathfrak{R}'$ à $\mathfrak{R}$, que F est le polynôme nul, ce qui est absurde.

Le degré n du polynôme homogène F, qui est ainsi indépendant du repère, est dit *ordre* de la courbe algébrique Γ. Nous allons en donner une interprétation, en étudiant l'intersection de Γ et d'une droite quelconque D, que nous définissons par deux de ses points $M_0(X_0, Y_0, T_0)$ et $M_1(X_1, Y_1, T_1)$. Le point générique de D admet les coordonnées

$$X = X_0 + \lambda X_1, \qquad Y = Y_0 + \lambda Y_1, \qquad T = T_0 + \lambda T_1.$$

L'équation « aux λ » des point $\Gamma \cap D$, qui est

$$F(X_0 + \lambda X_1, Y_0 + \lambda Y_1, T_0 + \lambda T_1) = 0,$$

s'écrit, par la formule de Taylor (II, 148, 2°) :

$$F_0 + \lambda(X_1F'_{X_0} + Y_1F'_{Y_0} + T_1F'_{T_0}) + \frac{\lambda^2}{2!}((X_1F_{X_0} + Y_1F_{Y_0} + T_1F_{T_0}))^2 + \ldots$$

$$+ \ldots + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}((X_1F_{X_0} + Y_1F_{Y_0} + T_1F_{T_0}))^{n-1} + \lambda^nF_1 = 0. \tag{2}$$

Il s'agit d'une équation algébrique dont le degré est exactement n si $F_1 \neq 0$, c'est-à-dire si $M_1 \notin \Gamma$, ce que l'on peut toujours supposer quand D n'est pas une partie de Γ. Autrement dit, à condition d'interpréter les racines multiples de (2), on peut affirmer qu'*une courbe algébrique de degré n est coupée en n points distincts ou confondus par toute droite qui n'est pas une partie de la courbe.*

2° **Étude de la courbe algébrique Γ, au voisinage d'un de ses points M_0.** — L'équation (2) fournit les points d'intersection de Γ et de la droite D, issue de M_0, déterminée par M_0 et par un second point M_1. Nous avons ici $F_0 = 0$; (2) admet 0 pour racine.

Limitons-nous au cas général où F'_{X_0}, F'_{Y_0}, F'_{T_0} ne sont pas tous nuls (ce qui est indépendant du repère, à cause de la linéarité des formules de changement de coordonnées). La racine 0 de (2) est alors simple, sauf si D est la *sécante exceptionnelle* d'équation

$$XF'_{X_0} + YF'_{Y_0} + TF'_{T_0} = 0. \tag{3}$$

Nous dirons que M_0 est un *point ordinaire* (ou *point simple*) de Γ et que la droite (3) est la *tangente en M_0 à Γ*, généralisant ainsi deux résultats déjà acquis, en ce qui concerne les points réels, dans le cas particulier que nous étudierons au 4°.

3° **Équation tangentielle d'une courbe algébrique; classe.** — Le calcul fait au n° 57, 1° reste valable. Il conduit à une équation tangentielle : $\Phi(u, v, h) = 0$, dans laquelle Φ est un polynôme de degré c.

Comme au 1°, on constate, en utilisant la linéarité des formules de changement de coordonnées tangentielles, que c est indépendant du repère; on dit que c est la *classe* de la courbe algébrique Γ. On l'interprète en étudiant les tangentes à Γ menées par un point quelconque, P, de $\mathfrak{X}_C$, que l'on définit comme intersection de deux droites $D_0(u_0, v_0, h_0)$ et $D_1(u_1, v_1, h_1)$. La droite générique issue de P admet les coordonnées

$$u = u_0 + \lambda u_1, \qquad v = v_0 + \lambda v_1, \qquad h = h_0 + \lambda h_1$$

et c est, précisément, le degré de l'équation « aux λ » des tangentes menées de P à Γ (au moins si toutes les droites issues de P ne sont pas tangentes à Γ). On peut dire que c est le nombre des tangentes à Γ menées par un point quelconque.

4° **Cas où $\mathfrak{X}_C$ est le complexifié de la complétion projective $\mathfrak{X}$ d'un plan affine réel $\mathcal{E}$ et où le polynôme F a des coefficients réels.** — Ordonnons le polynôme homogène F(X, Y, T) suivant les puissances croissantes de T :

$$F(X,Y,T) = \varphi_n(X,Y) + T\varphi_{n-1}(X,Y) + \ldots + T^{n-1}\varphi_1(X,Y) + T^n\varphi_0.$$

Les points à l'infini de Γ sont donnés par le système

$$\begin{cases} F(X,Y,T) = 0 \\ T = 0 \end{cases} \quad \text{qui s'écrit} \quad \begin{cases} \varphi_n(X,Y) = 0 \\ T = 0. \end{cases}$$

On reconnaît les points à l'infini de la courbe algébrique $\mathcal{C}$, d'équation $\varphi_n(X, Y) = 0$, qui est, ainsi que le montre un calcul fait au n° 250, 5° du tome III, une gerbe de n droites, réelles ou imaginaires (deux à deux conjuguées), distinctes ou confondues, issues de l'origine O du plan affine $\mathcal{E}$. On démontre, et nous admettrons, que celles de ces droites qui sont réelles ne sont autres que les directions asymptotiques (menées par O) de la restriction de Γ à $\mathcal{E}$. Nous sommes ainsi conduits à dire que $\mathcal{C}$ est la *gerbe asymptotique* de Γ.

On démontre que la tangente en un point ordinaire, réel, situé sur la droite de l'infini est une asymptote de la restriction de Γ à $\mathcal{E}$.

III. CONSTRUCTION D'UNE COURBE DÉTERMINÉE PAR UNE ÉQUATION $f(x, y) = 0$.

59. *Marche à suivre.* — 1° La méthode générale pour construire la courbe Γ déterminée par l'équation non résolue

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

consiste à étudier, suivant les valeurs données à l'une des variables x, y combien l'équation (1) définit de valeurs réelles pour l'autre variable et quels sont leurs signes, c'est-à-dire en somme à discuter les intersections de Γ avec une droite variable parallèle à l'un des axes.

Cette méthode s'applique notamment lorsque, par rapport à l'une des coordonnées, f est un polynôme du second degré, du troisième degré, ou un polynôme bicarré.

2° On note les divers renseignements que fournit l'examen de la fonction f.
Si $f(x, y) = f(y, x)$, la première diagonale est un axe de symétrie.
Si $f(-x, -y) = f(x, y)$ [resp. $= -f(x, y)$], l'origine est centre de symétrie.
On cherche aussi les points communs à Γ et aux axes.

3° Dans le cas particulier où f est un polynôme, on peut étudier les branches infinies de Γ.

On sait (**58**, 4°) que Γ ne peut admettre un point réel α à l'infini que si les paramètres directeurs l, m de la direction δ dont α est le point à l'infini sont tels que

$$\varphi_n(l, m) = 0,$$

φ_n étant l'ensemble homogène des termes de plus haut degré de f.

Si $l \neq 0$, on choisit $l = 1$, m est alors le coefficient directeur de δ.

On coupe Γ par une droite Δ quelconque de direction δ; Δ coupe Γ en moins de n points à distance finie, soit $n - p$; s'il existe une droite Δ, parallèle à δ et coupant Γ en moins de $n - p$ points à distance finie, Δ est une asymptote de Γ.

4° Si on ne peut discuter l'équation (1) par rapport à x ou y, on peut parfois étudier l'intersection de Γ avec une droite variable passant par un point fixe A de Γ.

5° Si la fonction f est de la forme :

$$f = g_1 g_2 + h_1 h_2,$$

g_1, g_2, h_1 h_2, étant des fonctions de x et y :

1° Les points M communs aux courbes $g_i = 0$ et $h_j = 0$ appartiennent à Γ;

2° Il n'existe pas de point de Γ dans les régions du plan où se trouvent les solutions de l'inéquation

$$g_1 g_2 h_1 h_2 > 0.$$

60. *Exemples de construction de courbes représentées par* $f(x, y) = 0$. — Le repère est supposé orthonormé.

1° *Construire la courbe* (Γ) *déterminée par*

(1) $$x + y + x^3 - y^3 = 0.$$

I. — Le polynôme $f(x, y)$ du premier membre n'ayant que des termes impairs, (Γ) est symétrique par rapport à l'origine O.

II. — T est tangente en O à la seconde bissectrice des axes. Étudions la disposition de Γ par rapport à cette tangente.

Si $M(x, y)$ est un point de l'arc simple continu de Γ qui passe en O,

$$\frac{y}{x} = -1 + u, \qquad \lim_{x \to 0} u = 0.$$

Remplaçons dans (1) y par $-x + ux$

$$u + x^2 - x^4(-1 + u)^5 = 0.$$

Il en résulte que sur l'arc étudié

$$u \sim -x^2, \qquad ux \sim -x^3;$$

les deux arcs qui aboutissent en O sont au-dessous [resp. au-dessus] de la tangente suivant que l'on est à droite [resp. à gauche] de Oy (fig. 60).

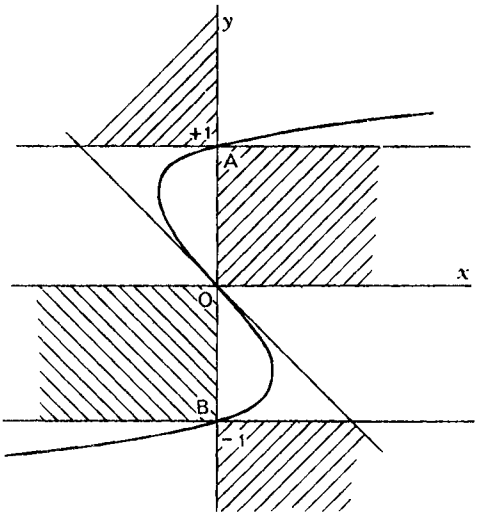


FIG. 60.

III. — En écrivant (1) sous la forme

$$(2) \qquad x(1 + x^2) = y(y^4 - 1)$$

on obtient, outre le point O, les points A(0, 1) et B(0, — 1).

Il n'existe pas de point de Γ dans la région du plan qui vérifie

$$xy\,(y^2 - 1) < 0.$$

Cette région a été couverte de hachures.

IV. — En écrivant (1) sous la forme

$$(3) \qquad x^3 + x + y(1 - y^4) = 0$$

le nombre des racines de cette équation du troisième degré dépend du signe de

$$D = 1 + 27\,y^2(1 - y^4)^2$$

$\forall y$, $D > 0 \Longrightarrow$ (3) admet une racine réelle et une seule en x.

V. — Γ n'admet pour point à l'infini que le point à l'infini sur Ox; toute parallèle à Ox coupant Γ en trois points à distance finie (dont un seul est réel), Γ n'admet pas d'asymptote parallèle à Ox.

2° *Construire la courbe* Γ *déterminée par*

$$x(y + x) + 2x^3 + x^4 + y^4 = 0.$$

I. Coupons Γ par une droite variable Δ passant par O : $y = tx$; on obtient O, compté 2 fois, et les points dont les abscisses vérifient

$$x^2(1 + t^4) + 2x + t + 1 = 0.$$

Le discriminant $D = -t(t^4 + t^3 + 1)$ ne s'annule que pour $t = 0$. Le tableau suivant donne le signe des racines x' et x''

t	$-\infty$		-1		0	$+\infty$
D		+			0	−
P		−	0	+		
	$x' < 0 < x''$			$x' < x'' < 0$		

$t = 0$: Γ est tangente en A $(-1, 0)$ à l'axe Ox (fig. 61).

$t = -1$: Γ est tangente en O à la seconde bissectrice; le tableau précédent permet de placer Γ par rapport à la tangente; la seconde bissectrice recoupe Γ au point B$(-1, +1)$.

Si t tend vers $-\infty$, les deux racines en x tendent vers 0, et Γ admet un arc présentant une inflexion en O, Oy étant la tangente d'inflexion.

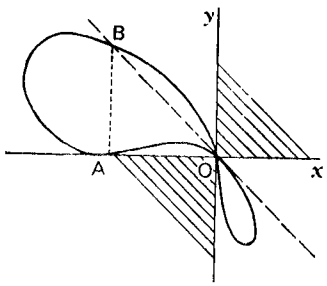


FIG. 61.

3° *Construire la courbe Γ déterminée par*

(1) $\qquad x^7 + 3x^2y^2 + 2y^3 = 0.$

I. — Discutons l'existence et le signe des racines réelles de l'équation (1) suivant les valeurs du paramètre x. L'équation, ordonnée par rapport à y, s'écrit

$$g(y) = 0, \qquad g(y) = 2y^3 + 3x^2y^2 + x^7.$$

$g'(y) = 6y(y + x^2)$ s'annule pour $y = 0$ et $y = -x^2$; on forme donc le tableau suivant :

y	$-\infty$	$-x^2$	0	$+\infty$
$g(y)$	$-\infty$	$x^6(x+1)$	x^7	$+\infty$

L'étude des signes des résultats de substitution conduit aux résultats suivants :

1° si $x < -1$, $g(y)$ admet une racine positive;

2° si $-1 < x < 0$, $g(y)$ admet 3 racines réelles séparées par les nombres

$$-x^2 \qquad \text{et} \qquad 0;$$

3° si $x > 0$, $g(y)$ admet une racine négative inférieure à $-x^2$.

Si $x = -1$, $\quad g(y) = (2y - 1)(y + 1)^2$.

II. — On peut préciser la courbe au voisinage de l'origine en la coupant par la droite $y = tx$; on obtient ainsi

(2) $\qquad x^4 + 3xt^2 + 2t^3 = 0.$

On est ramené à étudier dans un plan auxiliaire xO_1t la courbe Γ_1 d'équation (2), au voisinage du point O_1. Coupons Γ_1 par $\Delta_1(t = ux)$, et on obtient

$$x = -u^2(3 + 2u).$$

On en déduit $t = -u^3(3 + 2u)$

et $\qquad y = tx \qquad$ ou $\qquad y = u^6(3 + 2u)^3.$

La courbe Γ est donc unicursale.

Si $u \to 0$, $\quad x \sim -3u^2$, $\quad y \sim 9u^5$, $\quad$ et $\quad y \sim \pm x^2\sqrt{-\frac{x}{3}}$.

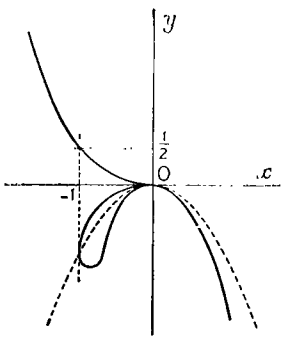


FIG. 62.

Si $u \to -\frac{3}{2}$, $\quad y \sim -\frac{3}{2}x^2$.

III. — Le point à l'infini sur Oy appartient à Γ; toute parallèle à Oy coupe Γ en 3 points à distance finie, par suite Γ n'admet pas d'asymptote parallèle à Oy.

Le tracé de Γ (fig. 62) résulte des remarques précédentes.

4° *Construire la courbe Γ déterminée par*

(1) $\qquad xy(x + y) - y^2 + x = 0.$

I. — Les points à l'infini de Γ sont :

le point α (0, 1, 0) à l'infini sur Oy;

le point β (1, 0, 0) à l'infini sur Ox;

le point γ $(1, -1, 0)$ à l'infini sur la seconde bissectrice.

a) Pour trouver s'il existe une asymptote relative à α, on ordonne l'équation de Γ par rapport à y :

(2) $$(x-1)\,y^2 + x^2 y + x = 0.$$

Toute parallèle à Oy coupe Γ en deux points à distance finie, à l'exception de la droite Δ d'abscisse 1; Δ est une asymptote de Γ. Δ coupe Γ en A (1, — 1); on place les branches infinies correspondantes de Γ par rapport à Δ en observant que si x tend vers 1, une racine y de (2) tend vers l'infini, avec le signe de la somme des racines $\frac{-x^2}{x-1}$.

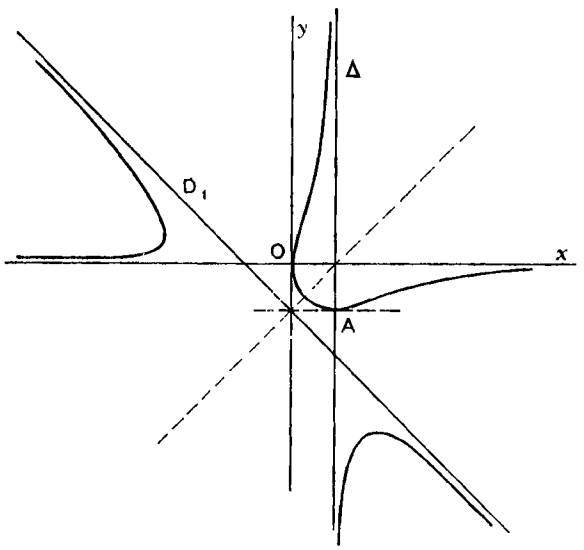


Fig. 63.

b) Pour trouver s'il existe une asymptote relative à β, on ordonne l'équation de Γ par rapport à x :

(3) $$yx^2 + (y^2+1)\,x - y^2 = 0.$$

Toute parallèle à Ox coupe Γ en deux points à distance finie, sauf l'axe Ox lui-même; Ox est une asymptote de Γ; cette asymptote coupe Γ en O; on place les branches infinies correspondantes de Γ par rapport à Ox en utilisant la somme des racines en x de l'équation (3), $-\frac{y^2+1}{y}$.

c) Enfin pour trouver s'il existe une asymptote relative à γ, on coupe Γ par une droite variable

(D) $$y + x = \lambda$$

passant par γ; l'équation aux abscisses des points communs à D et Γ est

(4) $$x^2(\lambda+1) - (\lambda+1)^2 x + \lambda^2 = 0.$$

Toute droite D coupe Γ en deux points à distance finie, sauf la droite D_1 correspondant à $\lambda = -1$; D_1 ne coupe Γ en aucun point à distance finie. Les racines de l'équation (4) ne sont réelles que si

$$\delta = (\lambda+1)[(\lambda+1)^3 - 4\lambda^2] \geqslant 0.$$

Lorsque λ tend vers — 1, ces racines ne sont réelles que si λ tend vers — 1 à gauche, elles sont alors de signes contraires, ce qui permet de placer par rapport à D_1 les branches infinies correspondantes de Γ.

II. — On peut construire Γ en discutant la réalité et le signe des racines en y de l'équation (2); cette réalité n'est assurée que si

$$\delta' = x[x^2 - 4x + 4] \geqslant 0.$$

Le crochet s'annule pour une seule valeur x_0 entre — 2 et — 3.

On peut aussi observer que la somme des racines de (4) est $\lambda + 1$; le milieu I (ξ, η) des deux points M' et M'' communs à D et Γ est déterminé par

$$\xi = \frac{\lambda+1}{2}, \qquad \eta + \xi = \lambda;$$

Ce point se trouve sur la droite $\eta = \xi - 1$, qui est ainsi un axe de symétrie de Γ.

5° *Construire la courbe* Γ *représentée par l'équation*

$$x^2 - y^2 = a^2 \sin\frac{xy}{a^2},$$

où a est une longueur donnée.

Γ est le lieu des points communs aux courbes associées

$$H_\lambda \quad xy = \lambda a^2 \qquad \text{et} \qquad K_\lambda \quad x^2 - y^2 = a^2 \sin\lambda$$

quand λ varie.

Les courbes K_λ ne sont situées que dans la région du plan où

$$|x^2 - y^2| \leqslant a^2;$$

cette région est limitée par les hyperboles

$$(L) \qquad x^2 - y^2 = a^2; \qquad (L') \qquad x^2 - y^2 = -a^2$$

et contient l'origine.

La symétrie de Γ par rapport à O apparaît, soit sur l'équation de Γ, soit dans la symétrie des courbes H_λ et K_λ par rapport à O.

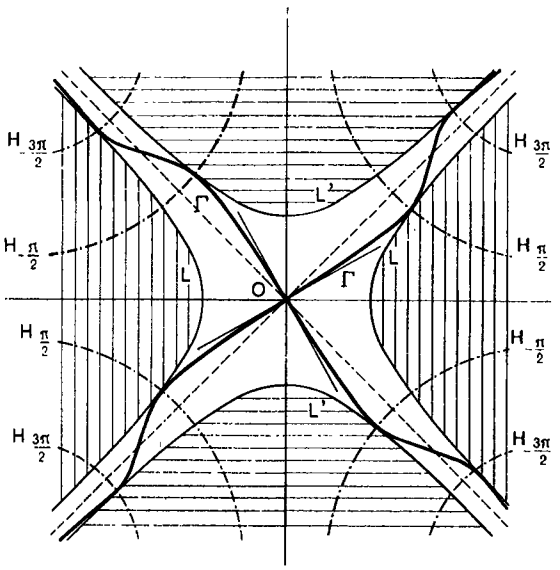


FIG. 64.

Γ est tangente à L aux points d'intersection de cette courbe avec les hyperboles H_λ pour $\lambda = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$; en effet, soit

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - a^2 \sin\frac{xy}{a^2} \qquad f'_x(x, y) = 2x - y\cos\frac{xy}{a^2} \qquad f'_y(x, y) = -2y - x\cos\frac{xy}{a^2};$$

aux points considérés, les dérivées partielles sont les mêmes pour la fonction $f(x, y)$ et pour la fonction $x^2 - y^2$.

De même Γ est tangente à L' aux points d'intersection de cette courbe avec les hyperboles H_λ pour $\lambda = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi$.

Enfin O est un point singulier de Γ puisque f'_x et f'_y prennent la valeur 0 en ce point.

Un développement limité de $f(x, y)$ au voisinage de O a pour termes de plus bas degré

$$f_1 = x^2 - y^2 - xy;$$

l'équation $f_1 = 0$ représente deux droites réelles, de coefficients directeurs $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; ces droites sont les tangentes à l' en O; ce sont des tangentes d'inflexion à cause de la symétrie par rapport à O.

Les remarques précédentes ont permis de construire la figure 64.

EXERCICES

1. — Construire les courbes représentées par les équations

$x^5 + y^5 + x^3y + y^3 = 0$;
$y^3 - 3yx^2 + 2x(x-1)(x-2) = 0$;
$x^2(x-y) + 4x^2 - y^2 = 0$;
$x^6y^4 - 4x^3y + 3 = 0$;
$(x^4 - 1)y^2 + (x^3 - 2)y - 1 = 0$;
$(x^2 + y)(y - 16x - 48) + 64 = 0$;
$(y - x)(x^2 + y^2 - 1) = (x + 1)(x + y + 1)$;
$4x^5 - 5x^4y - y^3 + 2y^2 = 0$;
$x^2y^2 + x^2y + xy - 1 = 0$;
$x(x + y - 1)(x - 2y) + 3y = 0$
$x^5 + 2xy^3 - 3y^2 = 0$
$x^4 - y(x^2 - y^2) = 0$
$(x + y)^3(x - y) - 3xy + x = 0$
$2x^3 - 3x^2y + y^3 + 3xy - 2x = 0$
$x^3y - axy^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$
$x^4 - y^4 = a^2(x^2 - 4y^2)$
$y^4 + (x + y)^3 + x^2 - y^2 = 0$
$4y^5 - 5xy^4 - x^3 + 2x^2 = 0$.

2. — Indiquer comment se déforme la courbe représentée par l'une des équations

$$(y + 2x)^2(y + x) - \lambda(x - y) = 0;$$
$$(4x^2 - y^2)^2 + \lambda(2x - y)x^2 + 8x^2 + y^2 = 0$$

quand λ varie.

3. — Construire les courbes représentées par l'une des équations

$$x^2 - \operatorname{Log} x = y^2 - \operatorname{Log} y; \quad x^y = y^x; \quad x \sin y = y \sin x;$$

ayant mis l'équation sous la forme $f(x) = f(y)$, on commencera par construire le graphe de la fonction $v = f(u)$.

4*. — Construire, sur la même figure, quelques-unes des courbes intégrales de l'équation différentielle

$$x(1 + y)y' - y(1 + x) = 0$$

(l'équation de ces courbes ayant été mise sous la forme $f(y) = f(x) + \lambda$, on utilisera le graphe de la fonction $v = f(u)$).

5. — On considère un cercle variable C tangent à Ox et centré sur la droite $y = x$ (repère orthonormé). A désigne un point fixe de Ox. Construire le lieu Γ des points de contact des tangentes à C menées par A, et le lieu Γ′ du pied de la polaire de A par rapport à C. Indiquer la nature des courbes Γ et Γ′.

6. — Trouver le lieu Γ, quand λ varie, du point d'intersection de la courbe

$$(C_\lambda) \qquad (y - \lambda x)(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0 \qquad (a \text{ fixe})$$

et de son asymptote. Quelle est la nature de Γ?

7. — Deux cercles C et Γ le premier fixe, le second variable sont tangents extérieurement au point fixe O. Trouver le lieu du point de contact de Γ et d'une tangente commune aux deux cercles.

8. — Lieu des foyers des paraboles dont on donne le sommet et un point.

9. — Déterminer le maximum de la distance de deux tangentes (resp. normales) parallèles à une cardioïde donnée.

10. — Former l'équation tangentielle d'une astroïde, d'une cissoïde droite, d'une strophoïde droite, d'une cardioïde, de la courbe d'équation $y = ax^3 + bx + c$.

CHAPITRE VII

ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE COURBES PLANES

61. *Définitions.* — 1° **Étant donné dans le plan une famille $\mathcal{F}$ de courbes C_λ dépendant d'un paramètre λ, λ prenant toutes les valeurs d'un intervalle réel $\mathcal{C}$, on dit que ces courbes admettent pour enveloppe une courbe E**

a) **si chaque courbe C_λ est tangente à E;**

b) **si, à chaque point M de E correspond une valeur $\lambda(M) \in \mathcal{C}$ telle que la courbe C_λ associée soit tangente en M à E;**

c) **si la fonction $\lambda(M)$ définie en *b*) n'est constante sur aucun arc de E.**

Les courbes C_λ sont dites *enveloppées* par E (fig. 65).

Tout point de contact entre C_λ et E est dit point caractéristique de C_λ.

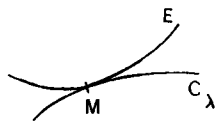


FIG. 65.

Il résulte de la condition *b*) que se trouve écarté le cas où toutes les courbes C_λ seraient tangentes à E au même point.

2° S'il existe un intervalle $\mathcal{C}' \subsetneq \mathcal{C}$ tel que, pour tout λ pris sur $\mathcal{C}'$, C_λ passe par un point fixe P, on dit aussi que P appartient à l'enveloppe des courbes C_λ.

3° PREMIERS EXEMPLES. — I. — Les tangentes à une courbe plane E sont des courbes dépendant du paramètre qui fixe le point de contact sur E, elles forment une famille de droites dépendant d'un paramètre, ces droites admettent pour enveloppe la courbe E. Le point de contact d'une tangente est le point caractéristique de cette droite.

II. — Les cercles de rayon donné R, tracés dans un plan avec les différents points d'une droite D pour centres ont manifestement pour enveloppe deux parallèles à D situées à la distance R de cette droite.

I. ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE DROITES

Nous examinerons d'abord l'enveloppe de la famille $\mathcal{F}$ des droites D_λ dépendant d'un paramètre λ; cette théorie s'adresse aux élèves de première année; les élèves de seconde année étudieront la théorie générale, plus délicate du n° 66, mais ils auront intérêt à revoir la discussion des cas particuliers, cette discussion pouvant, à propos d'une droite variable, être poussée plus loin qu'à propos d'une courbe quelconque.

62. *Point caractéristique d'une droite variable. Cas général.* -

1° Problème. — Soit D_λ la droite variable d'équation cartésienne

$$u(\lambda)x + v(\lambda)y + w(\lambda) = 0, \tag{1}$$

u, v, w étant trois fonctions de λ, définies sur l'intervalle réel $\mathcal{C}$ et pourvues sur $\mathcal{C}$ de dérivées successives.

Si u, v, w sont des polynômes en λ du 1er degré, D_λ passe par un point fixe P (à distance finie ou infinie).

Nous écartons ce cas dans l'étude qui va suivre.

Peut-on déterminer deux fonctions

$$x = \varphi(\lambda) \qquad y = \psi(\lambda) \tag{2}$$

telles que la courbe E *ainsi représentée soit enveloppe des droites* D_λ?

Nous ne rechercherons que des fonctions φ et ψ pourvues de dérivées successives continues.

2° Analyse. — *Supposons qu'il existe une enveloppe* E *pour la famille des droites* D_λ.

A chaque valeur λ du paramètre correspond une droite D_λ tangente à E en un point M dont les coordonnées, déterminées par la valeur considérée λ sont données par les formules (2); M est le point générique de E.

En général $\varphi'(\lambda)$ et $\psi'(\lambda)$ ne sont pas nulles toutes deux pour la valeur λ du paramètre et peuvent être regardées comme des paramètres directeurs de la tangente en M à E, tangente qui, d'autre part, a pour équation cartésienne l'équation (1); en écrivant que la parallèle à D_λ menée par l'origine contient le point (φ', ψ'), on obtient

$$u(\lambda).\varphi'(\lambda) + v(\lambda).\psi'(\lambda) = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C} \tag{3}$$

D'autre part, le point $M(\lambda)$ étant situé sur D_λ,

$$u(\lambda).\varphi(\lambda) + v(\lambda).\psi(\lambda) + w(\lambda) = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C} \tag{4}$$

$$(4) \Longrightarrow (5)\quad u(\lambda).\varphi'(\lambda) + v(\lambda).\psi'(\lambda) + u'(\lambda).\varphi(\lambda) + v'(\lambda).\psi(\lambda) + w'(\lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathcal{C}$$

et par suite, en tenant compte de l'égalité (3),

$$u'(\lambda).\varphi(\lambda) + v'(\lambda).\psi(\lambda) + w'(\lambda) = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C} \tag{6}$$

Les égalités (4) et (6) expriment que les fonctions $\varphi(\lambda)$ et $\psi(\lambda)$ constituent une solution des équations linéaires

$$u(\lambda).x + v(\lambda).y + w(\lambda) = 0. \tag{1}$$

$$u'(\lambda).x + v'(\lambda).y + w'(\lambda) = 0. \tag{7}$$

En d'autres termes, *le point caractéristique* M *est nécessairement le point commun à la droite* D_λ *et à la droite* D'_λ *que représente l'équation* (7).

S'il existe une enveloppe, celle-ci appartient à la courbe engendrée, quand λ varie, par le point commun aux droites D_λ et D'_λ.

3° **Synthèse.** — Réciproquement, soit M le point commun aux droites D_λ et D'_λ, en supposant que ces droites ne sont ni parallèles, ni confondues, c'est-à-dire

$$uv' - vu' \neq 0.$$

On sait calculer les coordonnées de M (1); ce sont des fonctions de λ, soit

$$(2') \quad x = \varphi(\lambda), \quad y = \psi(\lambda) \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{vw' - wv'}{uv' - vu'}, \quad \psi = \frac{wu' - uw'}{uv' - vu'}.$$

Lorsque λ varie, ce point décrit une courbe E. Puisque $M(\lambda)$ appartient à la droite D_λ, on peut écrire l'égalité (4), et par suite aussi l'égalité (5). Les égalités (5) et (6) étant simultanément vérifiées, elles entraînent l'égalité (3) qui exprime en général que la tangente en M à E a la direction de D_λ ce qui achève de prouver que D_λ est tangente en M à E.

4° **Conclusion.** — *a*) On peut alors énoncer :

THÉORÈME. — **La famille $\mathcal{F}$ des droites D_λ d'équation générale**

$$(1) \qquad u(\lambda)x + v(\lambda)y + w(\lambda) = 0$$

admet en général une enveloppe E engendrée, lorsque λ varie, par le point commun à D_λ et à la droite associée D'_λ

$$(7) \qquad u'(\lambda)x + y'(\lambda)y + w'(\lambda) = 0$$

dont l'équation est obtenue en annulant la dérivée par rapport à λ du premier membre de l'équation de D_λ.

b) APPLICATION PRATIQUE. — I. Si on résout par rapport à x et y le système des équations (1) et (7), on obtient en général une représentation paramétrique de l'enveloppe.

II. — Si on élimine λ entre les équations (1) et (7), on obtient en général l'équation cartésienne de l'enveloppe.

c) REMARQUE. — Soit $f(\lambda)$ une fonction qui prend une valeur non nulle en tout point de l'intervalle $\mathcal{C}$. Il peut être commode de représenter la famille $\mathcal{F}$ par l'équation générale

$$(1)^* \qquad f(\lambda)[u(\lambda)x + v(\lambda)y + w(\lambda)] = 0.$$

Alors que (1)* représente encore D_λ, l'équation obtenue par dérivation par rapport à λ, (7)*, représente une droite distincte de la droite D'_λ représentée par (7), mais susceptible de jouer le même rôle, puisqu'elle passe par le point caractéristique M de D_λ. En particulier, il sera commode d'adopter successivement $f = \frac{1}{u}$, $f = \frac{1}{v}$ (cf. n° 71, Ex. I).

---

(1) Si, quel que soit λ, $uv' - vu' = 0$, $\frac{v}{u}$ est une constante sur tout intervalle où ni u, ni v ne prend la valeur 0, D_λ a une direction fixe et le problème de l'enveloppe ne se pose pas.

63. *Point caractéristique.* — *Cas particuliers.* — Nous conservons les notations du paragraphe précédent ainsi que le numérotage des égalités.

1° **Asymptote.** — Supposons que pour une valeur λ_0 du paramètre les droites correspondantes D_{λ_0} et D'_{λ_0} soient strictement parallèles, c'est-à-dire

$$\frac{u'(\lambda_0)}{u(\lambda_0)} = \frac{v'(\lambda_0)}{v(\lambda_0)} \neq \frac{w'(\lambda_0)}{w(\lambda_0)}.$$

Lorsque λ tend vers λ_0, le point caractéristique M s'éloigne indéfiniment et l'on sait que la droite D_{λ_0}, position limite d'une tangente D_λ dont le point de contact s'éloigne indéfiniment est une asymptote de E.

2° **Droite stationnaire.** — Supposons que, pour une valeur λ_1 du paramètre, le système [(1), (7)] du n° 62 soit indéterminé; cela se produira lorsque

$$\frac{u'(\lambda_1)}{u(\lambda_1)} = \frac{v'(\lambda_1)}{v(\lambda_1)} = \frac{w'(\lambda_1)}{w(\lambda_1)}$$

c'est-à-dire lorsque les droites correspondantes D_{λ_1} et D'_{λ_1} sont confondues, ou lorsque D'_{λ_1} sera indéterminée, $u'(\lambda_1)$, $v'(\lambda_1)$, $w'(\lambda_1)$ étant simultanément nuls.

Tous les points de D_{λ_1} vérifient le système [(1), (7)], mais ils ne font pas partie de l'enveloppe E, car les raisonnements précédents ont supposé que E était engendrée par un point M variant avec λ, alors que tous les points de D_{λ_1} correspondent à la même valeur λ_1.

On appelle *droite stationnaire de la famille* $\mathcal{F}$ toute droite correspondant à une valeur λ_1 du paramètre pour laquelle le système [(1), (7)] est indéterminé.

3° CALCUL DES DÉRIVÉES $\varphi'(\lambda)$ ET $\psi'(\lambda)$. — Les fonctions φ et ψ vérifient les relations (4) et (6) du n° 62. Par dérivation (4), entraîne, compte tenu de (6)

$$u\varphi' + v\psi' = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C} \tag{3}$$

Par dérivation (6), entraîne

$$u'\varphi' + v'\psi' + u''\varphi + v''\psi + w'' = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C} \tag{8}$$

Si $uv' - vu' \neq 0$, le système [(3), (8)] donne φ' et ψ'.

D'après (3), il existe $k(\lambda)$ tel que

$$\varphi' = kv, \qquad \psi' = -ku,$$

k étant fourni par (8) :

$$k = \frac{u''\varphi + v''\psi + w''}{uv' - vu'}.$$

4° POINT CARACTÉRISTIQUE D'UNE DROITE STATIONNAIRE. — *a*) Lorsque λ tend vers la valeur λ_1 considérée au 2°, le point caractéristique $M(\varphi, \psi)$ de D_λ tend en général vers une position limite $M_1(\varphi_1, \psi_1)$ située sur D_{λ_1}; mais M_1 n'est pas déterminé par les équations [(1), (7)].

Pour λ_1, l'égalité (3) donne par continuité l'égalité

$$u_1\varphi'_1 + v_1\psi'_1 = 0 \tag{9}$$

et comme par hypothèse u'_1 et v'_1 sont proportionnels à u_1 et v_1, on en déduit

$$u'_1\varphi'_1 + w'_1\psi'_1 = 0 \tag{10}$$

c'est-à-dire que pour λ tendant vers λ_1, l'égalité (8) donne par continuité l'égalité

$$u_1''\varphi_1 + v_1''\psi_1 + w_1'' = 0, \tag{11}$$

ce qui montre que M_1 est situé sur la droite

$$D_{\lambda_1}'' : u''(\lambda_1)x + v''(\lambda_1)y + w''(\lambda_1) = 0.$$

Si u_1'' et v_1'' ne sont pas proportionnels à u_1 et v_1, M_1 est l'intersection des droites D_{λ_1} et D_{λ_1}''.

b) Cherchons la signification géométrique de M_1 pour l'enveloppe E.

Par dérivation par rapport à λ, (3) entraîne

$$u'\varphi' + v'\psi' + u\varphi'' + v\psi'' = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C} \tag{12}$$

A cause de (10), (12) donne, pour $\lambda = \lambda_1$

$$u_1\varphi_1'' + v_1\psi_1'' = 0. \tag{13}$$

Les égalités (10) et (13) entraînent $\varphi_1'\psi_1'' - \psi_1'\varphi_1'' = 0$.

Le point de contact d'une droite stationnaire de la famille $\mathcal{F}$ est en général un point d'inflexion de l'enveloppe E; exceptionnellement, si φ_1' et ψ_1' sont nuls tous deux, c'est un point stationnaire de E.

5° *POINTS STATIONNAIRES DE L'ENVELOPPE. — *a*) Le calcul du 3° montre que φ' et ψ' sont nuls simultanément pour les valeurs de λ qui sont racines de l'équation

$$u''\varphi + v''\psi + w'' = 0. \tag{14}$$

La recherche de l'enveloppe d'une droite variable quelconque conduit à une courbe qui présente normalement des points stationnaires.

b) Soit λ_2 une racine de l'équation (14) en λ; la synthèse du n° 62 n'est plus valable puisque $\varphi'(\lambda_2)$ et $\psi'(\lambda_2)$ sont nuls tous deux. Mais l'égalité (12) donne, pour λ_2, l'égalité

$$u(\lambda_2)\varphi''(\lambda_2) + v(\lambda_2)\psi''(\lambda_2) = 0.$$

Comme au point M_2 de E, la tangente est dirigée par le vecteur $[\varphi''(\lambda_2), \psi''(\lambda_2)]$, l'égalité précédente exprime encore le contact en M_2 entre la droite D_{λ_2} et l'enveloppe E. La validité de la synthèse est ainsi étendue aux points stationnaires de l'enveloppe.

6° *DROITE DOUBLE DE LA FAMILLE $\mathcal{F}$. — La représentation paramétrique des droites de la famille $\mathcal{F}$ au moyen des fonctions

$$u(\lambda), \qquad v(\lambda), \qquad w(\lambda)$$

est dite propre si à chaque valeur λ de $\mathcal{C}$ correspond une droite D_λ et si inversement cette droite D_λ ne peut correspondre qu'à la seule valeur λ de $\mathcal{C}$, sauf pour certaines droites exceptionnelles Δ qui peuvent correspondre à deux valeurs distinctes λ_1 et λ_2 de $\mathcal{C}$, ce qui arrive dans le cas exceptionnel où les coordonnées homogènes des droites D_{λ_1} et D_{λ_2} sont proportionnelles

$$\frac{u(\lambda_2)}{u(\lambda_1)} = \frac{v(\lambda_2)}{v(\lambda_1)} = \frac{w(\lambda_2)}{w(\lambda_1)}.$$

Comme les droites D_{λ_1}' et D_{λ_2}' sont distinctes en général, l'enveloppe E touche Δ en deux points distincts :

$$M_1 = \Delta \cap D_{\lambda_1}'; \qquad M_2 = \Delta \cap D_{\lambda_2}'.$$

On dit alors que Δ est une droite double de la famille $\mathcal{F}$.

On pourrait définir plus généralement une droite d'ordre p pour la famille $\mathcal{F}$.

64. *Propriétés géométriques du point caractéristique.* — 1° Nous gardons les notations des nos **62** et **63**. L'intersection des droites D_λ et $D_{\lambda+h}$ $(h \neq 0)$ est donnée par le système

(1) $u(\lambda)x + v(\lambda)y + w(\lambda) = 0$; (2) $u(\lambda+h)x + v(\lambda+h)y + w(\lambda+h) = 0$

équivalent au système formé par (1) et (3) $\frac{\Delta u}{h}x + \frac{\Delta v}{h}y + \frac{\Delta w}{h} = 0$ en posant

$\Delta u = u(\lambda+h) - u(\lambda)$, $\Delta v = v(\lambda+h) - v(\lambda)$, $\Delta w = w(\lambda+h) - w(\lambda)$.

Limitons-nous au cas où, pour la valeur λ, $uv' - vu' \neq 0$; le point caractéristique M de D_λ a pour coordonnées les expressions (2') du n° **62**, 3°. D'après la continuité des fonctions u, u', v, v' de λ, on a, pour $|h|$ assez petit, $\delta = u\frac{\Delta v}{h} - v\frac{\Delta u}{h} \neq 0$ et les équations (1), (3) forment un système de Cramer. Les droites D_λ et $D_{\lambda+h}$ ont un point commun unique T; les coordonnées de ce point se déduisent des formules (2') (**62**, 3°) en remplaçant formellement u', v', w', par $\frac{\Delta u}{h}$, $\frac{\Delta v}{h}$, $\frac{\Delta w}{h}$, ce qui montre que T a pour limite M lorsque h tend vers 0. Nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Le point caractéristique d'une droite D_λ est en général la position limite du point commun à cette droite et à une autre droite D_μ de la même famille, quand μ tend vers λ.**

2° APPLICATION. — Pour chercher géométriquement l'enveloppe d'une droite variable D_λ, on détermine le point commun à D_λ et à une autre droite D_μ de la même famille, comme intersection de D_λ avec une courbe K_1 autre que D_μ, de façon à ne pas avoir d'indétermination lorsque μ tend vers λ. Si, lorsque μ tend vers λ, la courbe K_1 a une position limite K, l'intersection de K avec D_λ est le point caractéristique M de D_λ; l'enveloppe cherchée est le lieu géométrique de M.

65. *Points du plan où passent des droites D_λ confondues.* — **1° Généralités.** — On donne une famille $\mathcal{F}$ de droites D_λ dépendant du paramètre λ (équation (1) du n° **62**).

Celles de ces droites qui passent par le point $P(\xi, \eta)$ correspondent aux valeurs λ racines de l'équation

$$(\sigma) \qquad u(\lambda)\xi + v(\lambda)\eta + w(\lambda) = 0.$$

A deux racines distinctes de (σ) correspondent deux droites distinctes de $\mathcal{F}$, sauf si P est choisi sur une droite multiple de la famille $\mathcal{F}$ (n° **63**, 6°), auquel cas (σ) admet comme racines les valeurs de λ associées à cette droite.

Nous nous proposons d'interpréter géométriquement les racines multiples de l'équation (σ). *On dit que par le point* P *passent p droites de la famille $\mathcal{F}$ confondues avec la droite D_λ si λ est racine d'ordre p de l'équation* (σ).

Comme au n° **30**, 5°, cette notion n'est pas intrinsèque; dans les exemples simples que nous envisagerons, cette difficulté ne se présentera pas.

2° **Points où passent 2 droites** D_λ **confondues.** — Deux des droites D_λ qui passent par P sont confondues si et seulement si l'équation (σ) admet une racine double en λ, c'est-à-dire s'il existe une valeur λ telle que les équations (σ) et

$$(\sigma') \qquad u'(\lambda)\xi + v'(\lambda)\eta + w'(\lambda) = 0$$

soient simultanément vérifiées. Les coordonnées d'un tel point P forment une solution du système des équations (1) et (7) du n° 62; un tel point P est donc en général un point de l'enveloppe E des droites D_λ; exceptionnellement P peut être un point d'une droite stationnaire de la famille des droites D_λ. Énonçons ce résultat :

THÉORÈME. — **Si P est un point du plan où passent 2 droites** D_λ **confondues,**
a) **ou bien P appartient à l'enveloppe E des** D_λ;
b) **ou bien P appartient à une droite stationnaire de la famille des** D_λ.

3° **Points où passent 3 droites** D_λ **confondues.** — *a*) Trois des droites passant par $P(\xi, \eta)$ sont confondues si et seulement si l'équation (σ) admet une racine triple en λ, c'est-à-dire s'il existe une valeur λ telle que les équations (σ), (σ') et

$$(\sigma'') \quad u''(\lambda)\xi + v''(\lambda)\eta + w''(\lambda) = 0$$

soient simultanément vérifiées.

Ces équations ne sont compatibles que si

$$(\gamma) \qquad \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = 0.$$

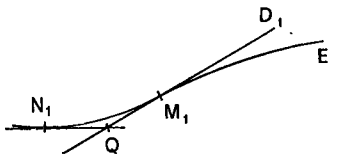


FIG. 66.

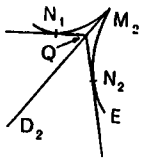


FIG. 67.

Si $uv' - vu' \neq 0$, nous avons appelé (φ, ψ) la solution de (σ) et (σ'), et la condition (γ) équivaut à la suivante :

$$(\gamma') \qquad u''\varphi + v''\psi + w'' = 0.$$

b) Soit λ_1 une racine de (γ) telle que D_{λ_1} et D'_{λ_1} soient confondues, D''_{λ_1} distincte de D_{λ_1}. D_{λ_1} est une droite stationnaire de la famille, son contact M_1 avec l'enveloppe E est le point $D_{\lambda_1} \cap D''_{\lambda_1}$, point d'inflexion de E.

c) Soit λ_2 une racine de (γ) telle que D_{λ_2} et D''_{λ_2} soient distinctes; leur point commun M_2 est le point caractéristique de D_{λ_2}, et ce point vérifie

$$u''(\lambda_2)\varphi(\lambda_2) + v''(\lambda_2)\psi(\lambda_2) + w''(\lambda_2) = 0.$$

On a montré au n° 63, 3° que M_2 est un point stationnaire de E.

d) En résumé, nous énoncerons

THÉORÈME. — **Si P est un point du plan où passent 3 droites** D_λ **confondues,**
a) **ou bien P est un point d'inflexion de l'enveloppe E.**
b) **ou bien P est un point stationnaire de E.**

Ces résultats s'expliquent sur les figures 66 et 67. La figure 66 montre un point Q situé sur la tangente d'inflexion D_1 en M_1; par Q on mène à E deux tangentes confondues avec D_1, et la tangente QN_1; lorsque Q tend vers M_1, QN_1 a pour position limite D_1, et de M_1 on mène à E trois tangentes confondues. La figure 67 montre un point Q situé sur la tangente D_2 de rebroussement en M_2; par Q on mène à E la tangente D_2 et deux tangentes QN_1, QN_2; lorsque Q tend vers M_2, QN_1 et QN_2 ont pour position limite D_2, et de M_2 on mène à E trois tangentes confondues.

II. ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE COURBES PLANES

66. *Points caractéristiques de la courbe* C_λ. *Cas général.* — 1° **Problème.** — On donne une famille $\mathcal{F}$ de courbes planes C_λ d'équation générale

$$f(x, y, \lambda) = 0. \tag{1}$$

On suppose f définie, continue, admettant des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 continues sur un pavé de R^3

$$\left.\begin{matrix} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{matrix}\right\} = \mathcal{D} \subset R^2$$

$$\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{C} = [\alpha, \beta] \subset R.$$

Peut-on déterminer deux fonctions

$$x = \varphi(\lambda), \qquad y = \varphi(\lambda) \tag{2}$$

telles que la courbe E *ainsi représentée soit enveloppe des courbes* C_λ?

Nous ne rechercherons que des fonctions φ et ψ pourvues de dérivées successives continues.

2° **Analyse.** — *Supposons qu'il existe une enveloppe* E *pour la famille des courbes* C_λ. A la valeur λ du paramètre correspond une courbe C_λ, tangente à E en un point M au moins dont les coordonnées, déterminées par la valeur considérée λ, sont données par les formules (2); M est point générique de E.

En général, $x' = \varphi'(\lambda)$ et $y' = \psi'(\lambda)$ ne sont pas toutes deux nulles pour la valeur λ du paramètre et peuvent être regardées comme des paramètres directeurs de la tangente en M à l'enveloppe. Puisque cette droite coïncide avec la tangente en M à la courbe C_λ, droite qui a pour équation

$$(X - \varphi) f'_x(\varphi, \psi, \lambda) + (Y - \psi) f'_y(\varphi, \psi, \lambda) = 0$$

si M n'est pas un point singulier de C_λ, ces droites ont même direction et par suite

$$\varphi' f'_x(\varphi, \psi, \lambda) + \psi' f_y(\varphi, \psi, \lambda) = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C}. \tag{3}$$

Par hypothèse $$f[\varphi(\lambda), \psi(\lambda), \lambda] = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C}. \tag{4}$$

Par dérivation par rapport à λ,

$$(4) \Longrightarrow (5) \quad f'_x(\varphi, \psi, \lambda)\varphi'(\lambda) + f'_y(\varphi, \psi, \lambda)\varphi'(\lambda) + f'_\lambda(\varphi, \psi, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{C}$$

et en tenant compte de (3), on obtient

$$f'_\lambda(\varphi, \psi, \lambda) = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C}. \tag{6}$$

Le point caractéristique M *appartient nécessairement aux courbes*

$$C_\lambda \ (1) \ f(x, y, \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad C'_\lambda \ (7) \ f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

En résumé, s'il existe une enveloppe E dans les conditions du 1°, E appartient à la courbe L engendrée, quand λ varie, par les points communs aux courbes C_λ et C'_λ.

3° **Synthèse.** — On a vu au tome II, n° 153, que l'on sait résoudre le système [(1), (7)] par rapport à x et y, en fonction de λ, si le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{\lambda x} & f''_{\lambda y} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

*De façon précise si (x_0, y_0, λ_0) est une solution commune à (1) et (7), et si $D \neq 0$ pour ces valeurs, c'est-à-dire si les courbes C_{λ_0} et C'_{λ_0} ne sont pas tangentes en leur point commun (x_0, y_0), il existe deux fonctions

$$x = \varphi(\lambda) \qquad y = \psi(\lambda) \qquad \text{telles que} \qquad x_0 = \varphi(\lambda_0), \qquad y_0 = \psi(\lambda_0)$$

et qui satisfont aux relations (4) et (6); ces fonctions sont continues et admettent des dérivées continues sur un voisinage $\mathcal{C}$ de λ_0.

Le point M de coordonnées $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, commun aux courbes C_λ et C'_λ décrit un arc l; cet arc fait-il partie de l'enveloppe E des C_λ?

φ et ψ vérifient (4), donc (5), ce qui, à cause de (6) entraîne (3).

Si M n'est pas singulier sur C_λ [f'_x et f'_y non simultanément nuls], et n'est pas stationnaire sur l'arc l [φ' et ψ' non simultanément nuls], (3) exprime le contact de C_λ avec l'arc l; l fait partie de l'enveloppe des C_λ.

4° **Conclusion.** — *a*) En tenant compte des réserves faites au cours de l'étude précédente, et sur lesquelles nous allons revenir, on peut énoncer :

THÉORÈME. — **La famille des courbes C_λ d'équation générale**

$$f(x, y, \lambda) = 0$$

admet en général une enveloppe E engendrée, lorsque varie, par les points communs à C_λ et à la courbe associée C'_λ

$$f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

dont l'équation est obtenue en annulant la dérivée par rapport à λ du premier membre de l'équation de C_λ.

67. *Points caractéristiques de la courbe* C_λ; *cas particuliers.* —

Nous conservons les notations du paragraphe précédent et en particulier le numérotage des égalités.

1° **Points fixes.** — Si le système [(1), (7)] admet une solution (x_0, y_0) indépendante de λ, le point $A(x_0, y_0)$ est un point fixe par lequel passent toutes les courbes C_λ.

Inversement, si C_λ passe constamment par le point fixe $A(x_0, y_0)$, c'est que l'on a

$$f(x_0, y_0, \lambda) = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C},$$

ce qui entraîne

$$f'_\lambda(x_0, y_0, \lambda) = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C}.$$

A fait partie de l'ensemble $C_\lambda \cap C'_\lambda$, $\forall \lambda \in \mathcal{C}$.

2° **Points singuliers.** — Supposons que C_λ admette, quel que soit λ, un point singulier P; ses coordonnées sont des fonctions ξ et η de λ telles que l'on ait le système

$$(S) \quad f(\xi, \eta, \lambda) = 0, \qquad f'_x(\xi, \eta, \lambda) = 0, \qquad f'_y(\xi, \eta, \lambda) = 0; \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C}.$$

Par dérivation, la première égalité (S) entraîne

$$f'_x(\xi, \eta, \lambda)\xi'(\lambda) + f'_y(\xi, \eta, \lambda)\eta'(\lambda) + f'_\lambda(\xi, \eta, \lambda) = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C},$$

et à cause des deux dernières égalités (S)

$$f'_\lambda(\xi, \eta, \lambda) = 0.$$

P fait partie de l'ensemble $C_\lambda \cap C'_\lambda$, $\forall \lambda \in \mathcal{C}$.

Le lieu l_s du point P fait partie de la courbe L engendrée par les points communs à C_λ et C'_λ; il ne fait pas partie en général de l'enveloppe E.

3° **Courbe stationnaire.** — *a*) Supposons que, pour la valeur λ_1 du paramètre, C_{λ_1} et C'_{λ_1} aient un arc commun γ; γ fait partie de la courbe L, mais ne fait pas partie de l'enveloppe E, puisque les points de γ ne sont pas obtenus pour les diverses valeurs de λ appartenant à un intervalle.

b) Supposons que pour la valeur λ_1 du paramètre, on ait

$$f'_\lambda(x, y, \lambda_1) = 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathcal{D}.$$

Les points fournis alors par le système [(1), (7)] sont tous les points de C_{λ_1}; C_{λ_1} appartient au lieu L, mais, pour la même raison qu'en *a*), C_{λ_1} ne fait pas partie de E.

Dans tous les cas où le sytème [(1), (7)] est indéterminé en x et y pour une valeur λ_1 de λ, on dit que la courbe C_{λ_1} est une *courbe stationnaire* de la famille C_λ.

Pour cette valeur λ_1, le déterminant D considéré au n° 66, 3° est nul, quel que soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

4° Calcul des dérivées $\varphi'(\lambda)$ et $\psi'(\lambda)$. — Les fonctions φ et ψ vérifient les relations (4) et (6). Par dérivation, (4) entraîne, compte tenu de (6)

$$(3) \qquad f'_x(\varphi, \psi, \lambda)\varphi' + f'_y(\varphi, \psi, \lambda)\psi' = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C}.$$

Par dérivation, (6) entraîne

$$(8) \qquad f''_{\lambda x}(\varphi, \psi, \lambda)\varphi' + f''_{\lambda y}(\varphi, \psi, \lambda)\psi' + f''_{\lambda^2}(\varphi, \psi, \lambda) = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C}.$$

Si le déterminant D n'est pas nul, le système [(3), (8)] donne φ' et ψ' :

$$\varphi' = kf'_y, \qquad \psi' = -kf'_x, \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{f''_{\lambda^2}}{D}.$$

*5° Points caractéristiques d'une courbe stationnaire. — Supposons que C_λ admette une enveloppe E décrite par $M(\varphi, \psi)$; si λ tend vers une valeur λ_1 considérée au 3°, M a une position limite $M_1(\varphi_1, \psi_1)$ située sur C_{λ_1}, mais M_1 n'est pas fourni par le système [(1), (7)].

L'égalité (3) donne, par continuité, pour $\lambda = \lambda_1$

$$f'_x(\varphi_1, \psi_1, \lambda_1)\varphi'(\lambda_1) + f'_y(\varphi_1, \psi_1, \lambda_1)\psi'(\lambda_1) = 0.$$

Or les deux lignes du déterminant D étant proportionnelles, l'égalité précédente peut s'écrire

$$f''_{\lambda x}(\varphi_1, \psi_1, \lambda_1)\varphi'(\lambda_1) + f''_{\lambda y}(\varphi_1, \psi_1, \lambda_1)\psi'(\lambda_1) = 0$$

et alors l'égalité (8) entraîne par continuité, pour λ tendant vers λ_1,

$$f''_{\lambda^2}(\varphi_1, \psi_1, \lambda_1) = 0,$$

ce qui montre que M_1 est situé sur la ligne

$$C''_{\lambda_1}) \qquad f''_{\lambda^2}(x, y, \lambda_1) = 0.$$

Les points de contact de E avec C_{λ_1} sont à chercher parmi les points communs à C_{λ_1} et C''_{λ_1}.

*6° Points stationnaires de l'enveloppe. — *a*) Le calcul du 4° montre que $\varphi'(\lambda)$ et $\psi'(\lambda)$ sont nuls si, et seulement si, λ ne correspondant pas à une courbe C_λ stationnaire, λ est racine de l'équation

(9) $$f''_{\lambda^2}[\varphi(\lambda), \psi(\lambda), \lambda] = 0.$$

Les racines de l'équation (9) fournissent en général les λ des points stationnaires de E.

b) Soit λ_2 une racine de (9), φ_2 et ψ_2 les coordonnées du point correspondant M_2; y a-t-il contact en M_2 entre l'arc *l* décrit par M au voisinage de λ_2 et la courbe C_{λ_2}?

Par dérivation, l'égalité (5) entraîne, pour tout $\lambda \in \mathcal{C}$,

$$(10) \quad f'_x(\varphi, \psi, \lambda)\varphi'' + f'_y(\varphi, \psi, \lambda)\psi'' + \varphi'\frac{d}{d\lambda}[f'_x(\varphi, \psi, \lambda)] + \psi'\frac{d}{d\lambda}[f'_y(\varphi, \psi, \lambda)] = 0.$$

Pour $\lambda = \lambda_2$ (10) donne l'égalité

$$f'_x(\varphi_2, \psi_2, \lambda_2)\varphi''(\lambda_2) + f'_y(\varphi_2, \psi_2, \lambda_2)\psi''(\lambda_2) = 0;$$

la tangente en M_2 à l'arc *l* étant dirigée par le vecteur $\varphi''(\lambda_2)$, $\psi''(\lambda_2)$, il y a contact entre *l* et C_{λ_2}.

7° **Application pratique de la discussion précédente.** — En cherchant le lieu géométrique des points communs aux courbes associées C_λ et C'_λ on peut obtenir, non seulement l'enveloppe E de la famille $\mathcal{F}$ des courbes C_λ, mais aussi, le cas échéant :

a) des points communs à toutes les courbes C_λ;

b) un lieu de points singuliers des courbes C_λ;

c) les courbes stationnaires de la famille $\mathcal{F}$.

68. ***Propriétés géométriques des points caractéristiques.*** — Les points communs à C_λ et à la courbe $C_{\lambda+h}$ ($h \neq 0$) ont des coordonnées qui sont solutions du système

$$(1) \quad f(x, y, \lambda) = 0 \qquad (2) \quad f(x, y, \lambda + h) = 0$$

ou du système équivalent

$$(1) \text{ et } (3) \quad \frac{1}{h}[f(x, y, \lambda + h) - f(x, y, \lambda)] = 0$$

En admettant que ces points communs ont des positions limites sur C_λ quand h tend vers zéro, que les coordonnées des positions limites sont solutions du système limite

$$(1) \quad \text{et} \quad (4) \quad f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0,$$

et que toute solution du système limite est la limite d'une solution du système initial, on se rend compte du fait suivant :

Les points caractéristiques d'une ligne C_λ sont des positions limites de points communs à cette ligne et à une ligne C_μ de la même famille, lorsque μ tend vers λ.

Ce résultat n'est pas applicable à une ligne stationnaire de la famille C_λ.

69. *Points du plan où passent deux courbes C_λ confondues.* — Reprenons l'équation générale

$$(1) \qquad f(x, y, \lambda) = 0$$

des courbes C_λ de la famille $\mathcal{F}$. Celles de ces courbes qui passent par un point donné $P(\xi, \eta)$ du plan correspondent aux valeurs $\lambda \in \mathcal{C}$, racines de l'équation

$$(2) \qquad f(\xi, \eta, \lambda) = 0.$$

Deux des courbes C_λ qui passent par P sont confondues si, et seulement si, l'équation (2) admet une racine double en λ, c'est-à-dire s'il existe une valeur $\lambda \in \mathcal{C}$ telle que les équations (2) et

$$(3) \qquad f'_\lambda(\xi, \eta, \lambda) = 0$$

soient simultanément vérifiées. Un tel point P appartient à la courbe L engendrée, quand λ varie dans $\mathcal{C}$, par les points communs à C_λ et C'_λ. En utilisant les résultats obtenus aux nos **66** et **67**, nous énoncerons :

L'*ensemble des points du plan où passent deux courbes C_λ confondues peut comprendre :*

a) *l'enveloppe* E *des* C_λ ;

b) *des points fixes communs à toutes les courbes* C_λ ;

c) *un lieu de points singuliers de* C_λ ;

d) *les courbes stationnaires de la famille* $\mathcal{F}$.

III. RECHERCHE PRATIQUE D'UNE ENVELOPPE

70. *Méthodes générales pour trouver l'enveloppe* E *d'une famille de courbes* $(C_\lambda) : f(x, y, \lambda) = 0$. — Il résulte des études faites aux nos **62** et **66** que l'enveloppe E de la famille des courbes fait partie de la courbe L engendrée, quand λ varie, par les points communs aux courbes associées

$$\left.\begin{aligned} &C_\lambda) \quad f(x, y, \lambda) = 0 \\ &C'_\lambda) \quad f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$$

et qu'en général E se confond avec L.

1° **Recherche analytique.** — *a*) Si l'on peut trouver en fonction de λ les coordonnées des points communs à C_λ et C'_λ, c'est-à-dire si on sait résoudre par rapport à x et y le système des équations (1) et (2), on aura une représentation paramétrique de E; on saura en particulier faire ce calcul si C_λ est une droite.

b) En éliminant λ entre les équations (1) et (2), on forme l'équation cartésienne de la courbe L dont E fait partie.

c) En exprimant que l'équation (1) admet une racine double en λ, λ appartenant à l'intervalle C, on détermine la courbe L.

EXEMPLES. — I. Si l'équation générale des courbes de la famille est du second degré par rapport au paramètre, soit

$$P(x, y)\lambda^2 + Q(x, y)\lambda + R(x, y) = 0,$$

l'équation de l'enveloppe est

$$Q^2 - 4PR = 0.$$

II. — L'enveloppe des courbes qui ont pour équation générale

$$P(x, y)\lambda^3 + Q(x, y)\lambda + R(x, y) = 0$$

est représentée par

$$4\left(\frac{Q}{P}\right)^3 + 27\left(\frac{R}{P}\right)^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad 4Q^3 + 27PR^2 = 0.$$

III. — L'enveloppe des courbes qui ont pour équation générale

$$P(x, y)\cos\lambda + Q(x, y)\sin\lambda = R(x, y)$$

est représentée par

$$P^2 + Q^2 = R^2.$$

IV. — Les points caractéristiques de la courbe

$$P(x, y)\,\mathrm{ch}\lambda + Q(x, y)\,\mathrm{sh}\lambda = R(x, y)$$

sont situés sur la courbe

$$P(x, y)\,\mathrm{sh}\lambda + Q(x, y)\,\mathrm{ch}\lambda = 0.$$

La résolution du système précédent en P et Q donne le système équivalent

$$P = R\,\mathrm{ch}\lambda, \qquad Q = -R\,\mathrm{sh}\lambda.$$

Les deux équations précédentes ne sont compatibles que si

$$P^2 - Q^2 = R^2, \qquad \text{avec} \qquad PR > 0$$

puisque ch λ ne peut prendre que des valeurs au moins égales à + 1.

2° **Recherche géométrique.** — Si l'on peut trouver géométriquement les points communs aux deux courbes C_λ et C_μ, comme intersections de C_λ avec une courbe K_1 autre que C_μ, on pourra déterminer géométriquement les points caractéristiques de C_λ.

En effet, la considération des points communs à C_λ et C_μ donne lieu à une indétermination lorsque μ tend vers λ.

Au contraire, si lorsque μ tend vers λ la courbe K_1 a une position limite K, les points communs à K et C_λ sont les positions limites des points communs à C_λ et C_μ; ceux d'entre eux qui ne sont ni fixes, ni singuliers sont les points caractéristiques de C_λ; on cherche la courbe qu'ils engendrent lorsque λ varie.

71. *Exemples d'enveloppe d'une famille de droites.* — EXEMPLE I. — *Enveloppe d'un segment de longueur constante dont les extrémités se déplacent sur deux droites perpendiculaires données* (fig. 68).

Prenons ces deux perpendiculaires pour axes de coordonnées $x'Ox$ et $y'Oy$. Soit AB l'une des positions du segment, A étant sur $x'x$. La perpendiculaire en A à $x'x$ coupe la perpendiculaire en B à $y'y$ en un point C du cercle Γ qui a pour centre O et pour rayon la longueur a du segment AB. Nous prendrons pour paramètre l'angle polaire θ du point C; les coordonnées de C sont $a\cos\theta$, $a\sin\theta$ et l'équation de la droite AB s'écrit

$$\frac{x}{a\cos\theta} + \frac{y}{a\sin\theta} - 1 = 0.$$

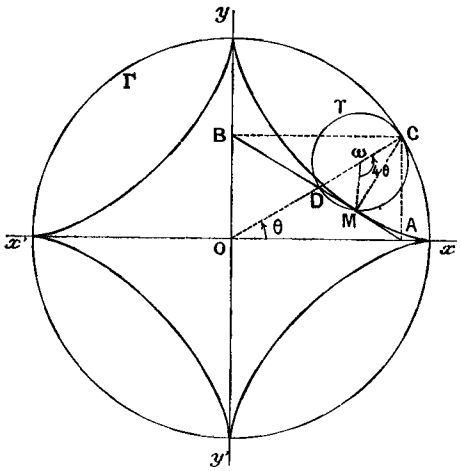


FIG. 68.

Pour calculer l'abscisse et l'ordonnée du point caractéristique de AB nous annulerons la dérivée par rapport au paramètre θ du premier membre de l'équation de AB après avoir mis cette équation successivement sous les deux formes

$$x\,\mathrm{tg}\,\theta + y - a\sin\theta = 0,$$
$$x + y\cot\theta - a\cos\theta = 0.$$

Nous trouvons ainsi les équations

$$x = a\cos^3\theta, \qquad y = a\sin^3\theta$$

la courbe ainsi représentée est appelée astroïde; on la construit aisément.

En annulant la dérivée par rapport à θ du premier membre de l'équation de AB mise sous la forme

$$x\sin\theta + y\cos\theta - a\cos\theta\sin\theta = 0$$

on trouve facilement

$$(x - a\cos\theta)\cos\theta - (y - a\sin\theta)\sin\theta = 0,$$

cette équation est celle de la perpendiculaire menée de C à AB. Cette observation donne une construction simple du point M caractéristique de AB.

On retrouve géométriquement cette construction en remarquant que si A'B' est une position du segment de droite autre que AB, et si P est le point commun à AB et à A'B', les cercles AA'P et BB'P se recoupent en Q, centre de la rotation qui amène A'B' sur AB. Lorsque A'B' tend vers AB le point Q, qui appartient aux médiatrices des segments AA' et BB' tend vers C et P tend vers le second point commun aux cercles de diamètres AC et BC, c'est-à-dire vers M (fig. 68).

Nous verrons, au n° 81, 6°, comment à partir de cette construction on peut engendrer l'astroïde.

EXEMPLE II. — Les axes Ox, Oy étant rectangulaires, soit P un point quelconque de la droite L joignant les points $A(a, 0)$ et $B(0, b)$; de ce point on mène les perpendiculaires PQ et PR à Ox et Oy; *trouver l'enveloppe de la droite* QR.

Les coordonnées du point P peuvent s'écrire $\frac{a}{1+\lambda}$, $\frac{b\lambda}{1+\lambda}$, et l'équation de la droite QR est alors

$$\frac{x}{a}(1+\lambda) + \frac{y(1+\lambda)}{b\lambda} - 1 = 0;$$

rendons-la entière par rapport à λ, et ordonnons-la :

$$\lambda^2\frac{x}{a} + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) + \frac{y}{b} = 0.$$

On forme immédiatement l'équation de l'enveloppe en écrivant que l'équation précédente en λ admet une racine double :

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2-\frac{4xy}{ab}=0.$$

L'enveloppe est une parabole tangente à Ox et Oy en A et B respectivement (fig. 69).

EXEMPLE III. — *Chercher l'enveloppe de la droite* Δ *représentée par l'équation* (1)

$$(t-2)x+(3t-2t^2)y+t^3=0.$$

Le point caractéristique de cette droite est le point où elle rencontre la droite Δ' qui a pour équation (2)

$$x+(3-4t)y+3t^2=0.$$

Le déterminant δ du système des équations (1) et (2) est $2(t-1)(t-3)$; si $t=1$, Δ et Δ' sont parallèles, c'est que la droite $\Delta_1(-x+y+1=0)$ est une asymptote de l'enveloppe E cherchée; si $t=3$, Δ et Δ' sont confondues suivant la droite représentée par l'équation $x-9y+27=0$; cette droite Δ_3 est une tangente d'inflexion pour E. Si δ n'est pas nul, la résolution des équations (1) et (2) donne

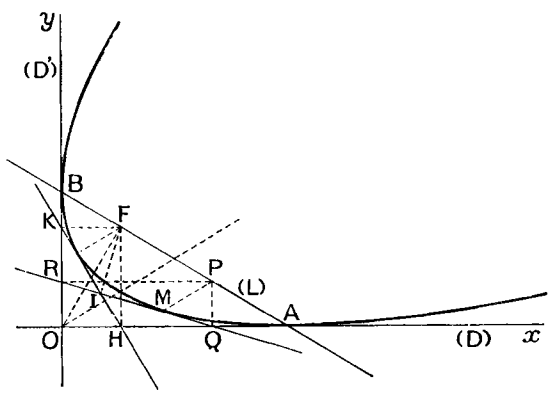


FIG. 69.

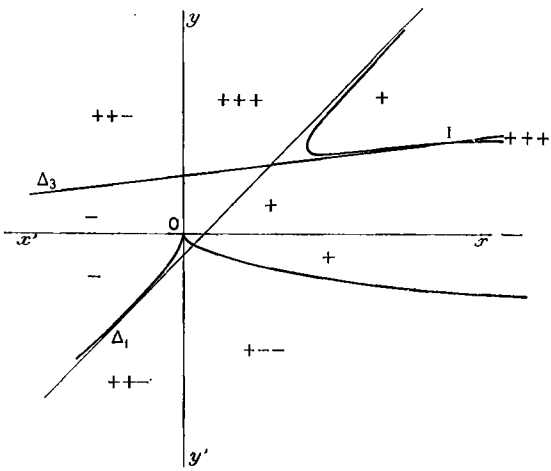


FIG. 70.

$$(3)\quad x=\frac{t^2}{t-1},\quad y=\frac{t^2}{t-1};$$

les équations (3) constituent une représentation paramétrique de la courbe E. Cette courbe est dessinée sur la figure 70. C'est une cubique ayant un point de rebroussement à l'origine; lorsque t devient infini, Δ s'éloigne à l'infini, et le point caractéristique M décrit une branche parabolique de E, la direction asymptotique de cette branche est celle de l'axe $x'x$. Le point d'inflexion I ($t=3$) a pour coordonnées $\frac{27}{2}$ et $\frac{9}{2}$.

EXEMPLE IV. — *On donne dans un plan une courbe* L *et un point* A. *Un point* H *décrit la courbe* L. *Donner une construction du point caractéristique de la droite* D *perpendiculaire en* H *à la droite* AH.

Soit H_1 un point qui peut venir en H en décrivant la courbe L, et soit D_1 la perpendiculaire en H_1 à AH_1. Les droites D et D_1 se coupent en un point P qui est l'intersection

de D avec le cercle Σ_1 passant par A, H, H_1 (fig. 71). Lorsque H_1 tend vers H, Σ_1 a pour position limite le cercle Σ tangent en H à L et passant par A; P a pour position limite le point M diamétralement opposé à A sur ce cercle (fig. 72). Si ω est le centre de Σ, la courbe E que décrit M se déduit de celle que décrit ω par l'homothétie (A, 2). La courbe L étant la podaire de E, on dit que la courbe E enveloppée par D est l'antipodaire de la courbe L.

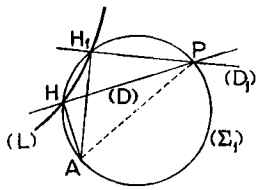


FIG. 71.

Remarque. — Plus généralement si l'on mène par le point H de la courbe L la droite Δ telle que $(HA, H\Delta) = \alpha$, α étant donné, un raisonnement analogue au précédent montre que le point caractéristique μ de Δ se trouve sur le cercle Σ tangent en H à L et passant par A. Comme $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega \mu}) = 2\alpha$, la courbe que décrit μ se déduit de celle que décrit ω par une similitude directe dont le centre est A.

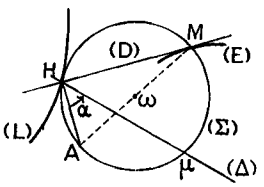


FIG. 72.

Application. — Dans le cas où L est une droite ou un cercle ne passant pas par A, le lecteur retrouvera des résultats bien connus sur les coniques.

EXEMPLE V. — *Un point* P *décrit une courbe* (L); *de ce point on mène des perpendiculaires* PQ *et* PR *à deux droites rectangulaires données* D *et* D'. *Trouver le point caractéristique de la droite* QR. — Soit O l'intersection des droites D et D'. La droite Δ symétrique de OP par rapport à PQ est l'homologue de QR dans l'homothétie (O, 2). Cherchons le point caractéristique de Δ. A cet effet, prenons sur (L) un point P' qui pourra venir en P en restant sur (L), et construisons la droite Δ' correspondante; elle rencontre Δ en S. Les droites OP et OP' étant symétriques en direction de Δ et Δ' par rapport à D et D', $(SP, SP') = -(OP, OP')$; les cercles circonscrits aux triangles SPP' et OPP' sont donc symétriques par rapport à la droite PP'. On en conclut que le point caractéristique I de Δ est le second point commun à Δ et au cercle γ_1 symétrique par rapport à la tangente (T) en P à (L) du cercle γ qui est tangent en P à (T) et passe par O. En d'autres termes I est symétrique par rapport à P du point H commun à Δ et à γ (fig. 73).

Le point caractéristique de QR est le milieu M de OI. Les droites (T) et OH sont antiparallèles par rapport aux droites OP et PH; il en est de même des droites (T) et PM, la droite PM est donc symétrique de (T) par rapport à PQ, ce qui donne une construction simple du point caractéristique de QR.

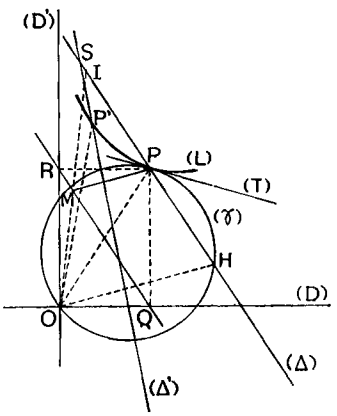


FIG. 73.

Application. — Lorsque la courbe (L) est une droite, on retrouve l'exemple 11 traité analytiquement ci-dessus (fig. 69).

Le cercle circonscrit au rectangle OQPR passe au pied F de la perpendiculaire menée de O à la droite (L). D'après le théorème de Simson, les pieds H, K, I des perpendiculaires menées de F aux droites D, D' et QR sont alignés, cela suffit pour établir que la droite QR reste tangente à la parabole qui a F pour foyer et la droite HK pour tangente au sommet; la directrice de cette parabole est la parallèle à HK menée par O; cette parabole est tangente aux droites D, D' aux points A, B; la direction de son axe est celle de la droite qui joint O au milieu de AB.

72. ***Enveloppe d'une famille de cercles.*** — 1° **Points caractéristiques d'un cercle variable.** — *a*) On donne, dans un repère orthonormé, un cercle variable C_λ d'équation

$$x^2 + y^2 - 2a(\lambda)x - 2b(\lambda)y + c(\lambda) = 0. \qquad (1)$$

Les points caractéristiques vérifient l'équation

$$-2a'(\lambda)x - 2b'(\lambda)y + c'(\lambda) = 0. \qquad (2)$$

La courbe C'_λ représentée par l'équation (2) est une droite perpendiculaire à la direction de paramètres directeurs $a'(\lambda)$, $b'(\lambda)$, c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente à la courbe D décrite par le centre P (a, b) du cercle.

Un cercle variable C_λ *a donc en général deux points caractéristiques situés sur une perpendiculaire à la tangente en* P *à la courbe décrite par le centre* P ***du cercle.***

b) Ce résultat s'obtient aussi géométriquement en observant que le cercle C_μ coupe le cercle C_λ en deux points situés sur l'axe radical de C_λ et C_μ; cette droite est perpendiculaire à la droite des centres PP_1 des deux cercles; la limite de cet axe radical quand μ tend vers λ est une droite perpendiculaire à la limite de PP_1, donc à la tangente en P à la courbe D lieu de P.

2° ENVELOPPE D'UN CERCLE VARIABLE C PASSANT PAR UN POINT FIXE O. — Pour définir la famille engendrée par ce cercle, il suffit de connaître la courbe (D), lieu de son centre P. L'axe radical L de deux cercles C et C_1 de la famille étudiée est la perpendiculaire abaissée de O sur la droite PP_1; sa position limite Δ est la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente PT en P à (D). L'enveloppe de C se compose du point O et du lieu géométrique de M; le pied H de la perpendiculaire décrivant la podaire de la courbe (D) par rapport au point O, l'enveloppe est l'homothétique de cette podaire dans l'homothétie (O, 2) (fig. 74).

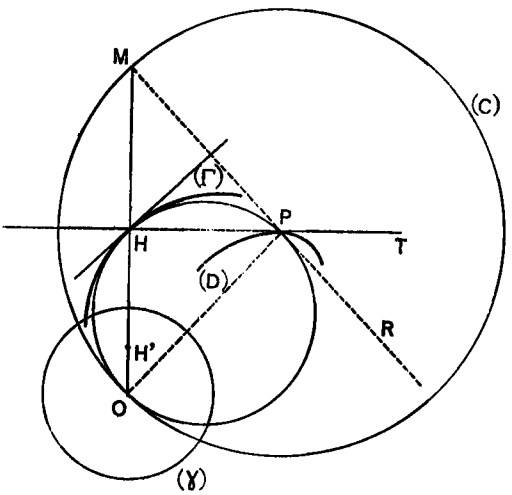


FIG. 74.

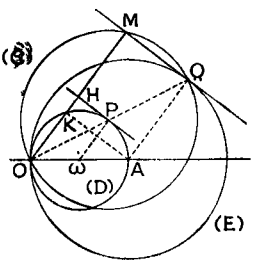


FIG. 75.

Par exemple, si (D) est un cercle passant par O, M décrit la podaire par rapport au point O du cercle (E) homothétique de (D) dans l'homothétie (O, 2), (fig. 75), c'est-à-dire la cardioïde, conchoïde de (D) par rapport à O, la longueur fixe ajoutée à chaque rayon polaire étant égale au diamètre de (D).

Remarques. — I. La tangente en un de ses points à la podaire (Γ) d'une courbe (D) par rapport au point O est la tangente en ce point au cercle qui a pour points diamétralement opposés le point O et le point correspondant de la courbe (D). Ce résultat est à rapprocher de celui qui a été obtenu dans l'exemple IV du n° 71, la courbe (D) étant l'antipodaire de la courbe (Γ) par rapport au point O.

II. Par rapport à un cercle (γ) décrit avec O pour centre (fig. 74) le pôle de PH est un point H′ aligné avec O et H et tel que $\overline{OH} \times \overline{OH'} = p$, p étant le carré du rayon de γ. La podaire d'une courbe (D) par rapport à un point O est une courbe inverse d'une transformée de (D) par polaires réciproques relativement à un cercle directeur ayant O pour centre.

3° Enveloppe d'un cercle variable C orthogonal a un cercle fixe (K). *a*) Soit (D) une courbe tracée dans un plan. Imaginons qu'un cercle, assujetti à rester orthogonal à un cercle (K) du plan, varie de façon que son centre décrive (D). Soient C et C_1 deux cercles de la famille, P et P_1 leurs centres, P_1 pouvant tendre vers P en restant sur (D). L'axe radical des cercles C et C_1 passe par le centre O de (K) et il est perpendiculaire à la droite PP_1. Lorsque P_1 tend vers P en restant sur (D), cet axe radical tend vers la perpendiculaire menée de O à la tangente en P à la courbe (D); les points caractéristiques de C sont les intersections M et M′ de C et de cette perpendiculaire. Le produit $\overline{OM} \times \overline{OM'}$ reste égal au carré R^2 du rayon du cercle (K). La courbe enveloppe se conserve dans l'inversion [O, R^2]. On exprime ce fait en disant qu'elle est anallagmatique.

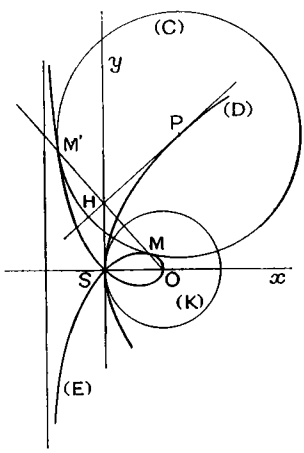


Fig. 76.

On obtient un résultat analogue pour un cercle variable C tel que la puissance du point fixe O par rapport à C soit une constante négative.

b) Les résultats du 2° et 3° s'obtiennent analytiquement en observant que dans l'équation (1) le terme $c(\lambda)$ est une constante qui est nulle pour le 2°, non nulle pour le 3°.

Exemple. — *Enveloppe du cercle variable* C *dont le centre* P *décrit la parabole* (D) ($y^2 - 2px = 0$) *et qui reste orthogonal au cercle* (K) *qui a pour centre le foyer* O *de la parabole et passe par le sommet* S *de cette courbe* (fig. 76).

Prenons comme paramètre l'ordonnée λ du centre P de C; l'abscisse de P est $\frac{\lambda^2}{2p}$; l'équation de C est de la forme

$$x^2 + y^2 - \frac{\lambda^2}{p}x - 2\lambda y + k = 0,$$

k étant déterminé par la condition que la puissance du foyer par rapport à C soit $\frac{p^2}{4}$, carré du rayon du cercle (K), ce qui donne $k = \frac{\lambda^2}{2}$; finalement l'équation de C,

$$x^2 + y^2 - \frac{\lambda^2}{p}x - 2\lambda y + \frac{\lambda^2}{2} = 0,$$

dépend du paramètre λ au second degré; nous obtiendrons l'équation cartésienne de l'enveloppe (E) en écrivant que cette équation dans laquelle on regarde λ comme une inconnue admet une racine double, ce qui donne

$$2x(x^2 + y^2) + p(y^2 - x^2) = 0;$$

(E) est une strophoïde droite (n° 51).

Géométriquement, les points caractéristiques M et M′ du cercle C de centre P sont les deux points de la perpendiculaire OH menée par O à la tangente PH en P à (D) tels que $\overline{OM} \times \overline{OM'} = OS^2$, et que HM = HM′. D'après cette dernière égalité

$$\overline{OM} \times \overline{OM'} = OH^2 - HM^2,$$

et finalement $HM^2 = OH^2 - OS^2$ ou SH^2.

M et M′ sont à l'intersection de OH et du cercle (H, HS).

4° Enveloppe d'un cercle C de rayon constant. *a*) Soit D une courbe plane. Cherchons l'enveloppe d'un cercle de rayon constant l dont le centre décrit D. Soit P un point quelconque de D et soit C le cercle qui a P pour centre et l pour rayon. Soit P_1 un point de D qui peut tendre vers P en restant sur D et soit C_1 le cercle correspondant. L'axe radical de ces cercles est perpendiculaire au segment PP_1 en son milieu. Lorsque P_1 tend vers P en restant sur D, cet axe radical tend vers la normale en P à cette courbe : les points caractéristiques sur le cercle C sont les points communs à ce cercle et à la normale en P à la courbe D.

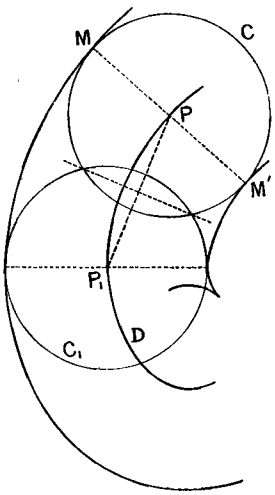


Fig. 77.

L'enveloppe du cercle C coïncide donc avec le lieu géométrique des extrémités des segments PM de longueur l normaux à la courbe D, ces extrémités décrivent des courbes dites courbes parallèles à la courbe D (fig. 77).

Une courbe D et les courbes parallèles sont des courbes admettant les mêmes normales.

b) Analytiquement, l'équation de C s'écrit

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - l^2 = 0.$$

L'équation dérivée par rapport à λ est

$$(x - a)a' + (y - b)b' = 0,$$

elle représente la normale en P à D.

73. ***Application de la théorie des enveloppes à la discussion de certaines équations.*** — Soit

$$f(a, b, t) = 0$$

une équation que nous supposerons algébrique, à coefficients réels, par rapport à a, b, et t. Si on y regarde l comme inconnue, a et b ayant des valeurs données, les racines réelles de l'équation sont les valeurs de l pour lesquelles les courbes C_t que peut représenter l'équation (2) $\qquad f(x, y, t) = 0$ passent par le point $P(a, b)$.

Si P décrit une courbe L de manière que les racines de l'équation (1) soient des fonctions continues du paramètre qui fixe la position de P sur cette courbe, le nombre des racines réelles ne peut changer que lorsque P passant en un point A de L, une racine réelle devient imaginaire ou inversement. Or, si une racine $t = \alpha + \beta i$ devient réelle, β s'annule et la racine imaginaire conjuguée $\alpha - \beta i$ se réduit aussi à la valeur α au point A. L'équation admet donc une racine double quand D est en A.

L'ensemble des points M (x, y) pour lesquels l'équation (2) en l a une racine multiple décompose le plan en régions dans lesquelles le nombre de racines réelles est le même. Cet ensemble comprend l'enveloppe des courbes C_t et, éventuellement, l'ensemble des points singuliers des courbes C_t, ainsi que celles des courbes qui sont stationnaires.

Exemple. — Soit à indiquer suivant la position du point P (a, b) le nombre des racines réelles de l'équation

(3) $\qquad l^3 - 2bl^2 + (a + 3b)l - 2a = 0.$

On est ramené à chercher l'enveloppe (E) de la droite Δ représentée par l'équation (1) de l'exemple III étudié au n° 71.

Pour tous les points de E autres que O et I l'équation (3) a une racine double; pour le point O elle a une racine triple nulle; pour le point I une racine triple égale à 3 et pour tous les autres points de la tangente stationnaire une racine double égale à 3. Les résultats relatifs à la réalité et aux signes des racines sont indiqués sur la figure 70.

74. ***Enveloppe d'une famille de courbes dépendant de deux paramètres liés par une relation.*** — Il peut être commode, pour écrire l'équation générale des courbes de la famille dont on cherche l'enveloppe, de les définir au moyen de p paramètres liés par $p - 1$ relations. Pour simplifier, nous supposerons que l'équation générale contient deux paramètres λ, μ liés par une relation. Soit

$$f(x, y, \lambda, \mu) = 0 \tag{1}$$

l'équation générale et soit

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0 \tag{2}$$

la relation.

Regardons l'équation (2) comme définissant μ en fonction de λ. Si l'on imagine que μ est remplacé dans l'équation (1) par cette fonction de λ, l'équation générale des courbes ne dépend plus que du paramètre λ et les coordonnées des points caractéristiques d'une courbe C_λ sont des solutions du système formé en associant à l'équation (1) celle que l'on écrit en annulant la dérivée du premier membre de cette équation par rapport à λ, soit

$$f'_\lambda(x, y, \lambda, \mu) + \mu' f'_\mu(x, y, \lambda, \mu) = 0. \tag{3}$$

La dérivée μ' de la fonction implicite μ définie par l'équation (2) est donnée, comme il a été indiqué au tome II, 151, 4°, par la relation

$$\varphi'_\lambda(\lambda, \mu) + \mu' \varphi'_\mu(\lambda, \mu) = 0. \tag{4}$$

Portant dans l'équation (3) la valeur de μ' que donne la relation (4) on trouve que les coordonnées des points caractéristiques de C_λ satisfont à l'équation

$$\frac{f'_\lambda(x, y, \lambda, \mu)}{\varphi'_\lambda(\lambda, \mu)} = \frac{f'_\mu(x, y, \lambda, \mu)}{\varphi'_\mu(\lambda, \mu)}. \tag{5}$$

L'enveloppe cherchée, lieu géométrique des points caractéristiques, est représentée, en général, par l'équation formée en éliminant λ et μ entre les équations (1), (2) *et* (5)

Il va sans dire que l'équation formée peut se décomposer en équations représentant non seulement l'enveloppe proprement dite, mais des courbes stationnaires et des lieux géométriques de points singuliers des courbes de la famille.

REMARQUE. — Si l'on peut explicitement résoudre l'équation (2) par rapport à l'une des variables, ou si l'équation (2) représente dans le plan des λ, μ une courbe dont on peut trouver aisément une représentation paramétrique, on utilise directement la théorie du n° 66.

75. *Enveloppe d'une famille de courbes données en coordonnées polaires.* — 1° On suppose le plan euclidien. Soit

$$f(\theta, r, \lambda) = 0 \tag{1}$$

l'équation générale d'une famille de courbes C_λ données par une équation implicite en coordonnées polaires dans le repère (O, Ox).

L'enveloppe E des courbes C_λ fait partie de l'ensemble L des points du plan où passent deux courbes C_λ confondues, c'est-à-dire des points (θ, r) pour lesquels sont simultanément vérifiées les équations (1) et

$$f'_\lambda(\theta, r, \lambda) = 0. \tag{2}$$

Les méthodes pratiques pour trouver une enveloppe dans le plan sont les mêmes en coordonnées polaires qu'en coordonnées cartésiennes; plus généralement elles sont valables quelle que soit la façon dont on détermine un point d'un plan par deux nombres.

2° EXEMPLE. — Traitons analytiquement l'enveloppe du cercle C passant par l'origine O et dont le centre P décrit le cercle D ayant pour diamètre OA.

Soit λ l'angle (OA, OP) : $(\overline{OP})_\lambda = a\cos\lambda$. Si Q (θ, r) est le point générique de C,

$$(\overline{OQ})_\theta = 2a\cos\lambda\cos(\theta - \lambda).$$

L'équation polaire de C peut s'écrire $r = a[\cos\theta + \cos(\theta - 2\lambda)]$.

En dérivant par rapport à λ, on obtient l'équation $\sin(\theta - 2\lambda) = 0$

qui donne l'angle polaire $\theta = 2\lambda$ du point caractéristique M (autre que O) :

$$(\overline{OM})_{2\lambda} = a[\cos 2\lambda + 1],$$

d'où enfin l'équation polaire de l'enveloppe, les coordonnées génériques étant ω et ρ

$$\rho = a(1 + \cos\omega)$$

on retrouve la cardioïde du n° 49, 3°.

IV. DÉVELOPPÉES

Nous supposons, dans ce sous-chapitre, que l'espace affine est euclidien, et que tous les repères sont orthonormés.

76. *Développée d'une courbe plane.* — 1° DÉFINITION. — **On appelle développée d'une courbe plane l'enveloppe des normales à cette courbe.**

Le point caractéristique I de la normale en M à la courbe Γ est appelé — comme nous le verrons au n° 118 — centre de courbure de Γ en M.

Si l'on connaît la développée de Γ, le problème des normales à Γ menées par un point donné du plan est ramené au problème analogue sur les tangentes à la développée de Γ, problème étudié au n° 57.

Cherchons dans quelques cas les coordonnées du point caractéristique d'une normale à une courbe.

2° *La courbe est déterminée par une équation résolue par rapport à l'une des coordonnées*, soit $y = f(x)$. La normale au point M(x, y) a pour équation

$$y'(Y - y) + X - x = 0.$$

En annulant la dérivée du premier membre par rapport au paramètre x on obtient l'équation

$$y''(Y - y) - y'^2 - 1 = 0.$$

Les formules

(1) $$\boxed{X - x = -\frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \qquad Y - y = \frac{1 + y'^2}{y''}}$$

donnent les coordonnées X, Y du point caractéristique I de la normale en M.

3° *La courbe est déterminée paramétriquement.* — Soient

$$x = f(u), \qquad y = g(u)$$

les expressions en fonction du paramètre u des coordonnées d'un point M de la courbe. La normale en M a pour équation

(2) $$(X - x)x' + (Y - y)y' = 0.$$

En égalant à zéro la dérivée du premier membre de cette équation par rapport au paramètre u on forme l'équation

(3) $$(X - x)x'' + (Y - y)y'' - x'^2 - y'^2 = 0.$$

La résolution du système des équations (2) et (3) conduit aux formules

(4) $$X - x = \frac{-y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}, \qquad Y - y = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}$$

qui donnent les coordonnées X, Y du point caractéristique I de la normale en M.

Nous donnerons de ces formules une expression plus condensée dans la théorie de la courbure (n° 117).

4° *La courbe est définie par une équation d'Euler.* — Rappelons que si l'on oriente par l'angle θ la direction perpendiculaire à une droite donnée D du plan, et si, H étant le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur D, on pose $\overline{OH} = p$, l'équation de D se met sous la forme

(5) $$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$$

dite équation normale de cette droite. En supposant que p est une fonction connue du paramètre θ, soit

(6) $$p = f(\theta),$$

la droite D enveloppe une courbe Γ; on dit que l'équation (6) est l'équation d'Euler de cette courbe Γ.

L'équation polaire $r = f(\theta)$ est celle de la courbe γ décrite par le point H; γ est la podaire de Γ par rapport à l'origine O, Γ est l'antipodaire de γ par rapport au point O (fig. 78).

Le point caractéristique M de D est l'intersection de cette droite avec la droite D′ dont l'équation s'obtient en annulant la dérivée par rapport à θ du premier membre de l'équation (5), soit

$$(7)\quad x\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+y\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-p'(\theta)=0$$

ou

$$(7')\quad -x\sin\theta+y\cos\theta-p'(\theta)=0.$$

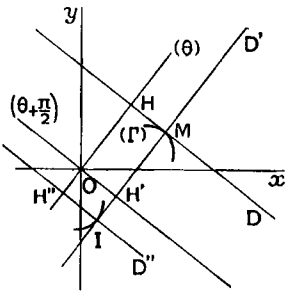


FIG. 78.

Sous la forme (7) on constate que D′ est la perpendiculaire en H′ à la droite OH′, le vecteur $\overrightarrow{OH'}$ ayant pour mesure algébrique $p'(\theta)$ dans la direction orientée par l'angle $\theta+\frac{\pi}{2}$. Cette droite D′ est donc la normale en M à l'enveloppe E.

Il est donc inutile de connaître en fonction de θ les coordonnées du point M pour déterminer la développée de Γ : il suffit de chercher l'enveloppe de la droite D′ d'équation (7); le point caractéristique I de D′ est l'intersection de D′ avec la drolte D″ représentée par l'équation

$$(8)\quad x\cos(\theta+\pi)+y\sin(\theta+\pi)-p''(\theta)=0$$

ou

$$(8')\quad x\cos\theta+y\sin\theta+p''(\theta)=0.$$

La résolution du système des équations (7) et (8) donnera une représentation paramétrique de la développée cherchée.

77. *Développées des coniques.* — 1° DÉVELOPPÉE D'UNE PARABOLE. — *a*) Toute parabole peut être représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$(1)\quad y^2=2px.$$

La normale au point M dont l'ordonnée est y a pour équation

$$(2)\quad Y-y+\left(X-\frac{y^2}{2p}\right)\frac{y}{p}=0.$$

En annulant la dérivée du premier membre de l'équation (2) par rapport au paramètre y nous trouvons

$$-1+\left(X-\frac{y^2}{2p}\right)\frac{1}{p}-\frac{y^2}{p^2}=0$$

d'où (3)
$$X=\frac{3y^2}{2p}+p \qquad \text{et} \qquad Y=-\frac{y^3}{p^2}.$$

La première de ces formules montre que

$$X+\frac{p}{2}=3\left(x+\frac{p}{2}\right);$$

$x+\frac{p}{2}$ et $X+\frac{p}{2}$ sont les abscisses respectives du point M et du point caractéristique I

de la normale quand, sans changer l'axe des abscisses, on prend la directrice de la parabole pour nouvel axe des ordonnées. Une construction simple de l résulte de cette observation : on marque l'intersection L de la directrice et de la normale :

$$\overrightarrow{LI} = 3\,\overrightarrow{LM}.$$

b) Les équations (3) permettent de construire la développée. On peut aussi en éliminant y entre les équations (3) ou encore en écrivant que l'équation (2) où y est l'inconnue a une racine multiple, former l'équation cartésienne de la développée :

$$Y^2 = \frac{8}{27\,p}(X - p)^3.$$

Le point R $(p, 0)$ est un point de rebroussement pour la développée (fig. 79).

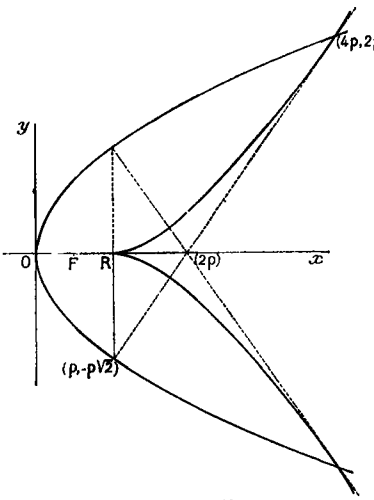


FIG. 79.

L'équation (E) aux abscisses des points communs à la parabole considérée et à sa développée a pour racine double $-\frac{p}{2}$. A cette racine correspondent les points d'intersection (imaginaires) de la parabole et de sa directrice. La racine simple de l'équation (E) est $4p$; à cette racine correspondent deux points communs réels.

c) L'équation tangentielle de la développée s'obtient en exprimant que la droite $D(u, v, w)$ coïncide avec la normale en M, [équation (2)] c'est-à-dire qu'il existe une valeur y telle que

$$\frac{y}{pu} = \frac{1}{v} = \frac{-y - \frac{y^3}{2p^2}}{w};$$

l'élimination de y donne

$$pu^3 + 2v^2(w + pu) = 0.$$

2° DÉVELOPPÉE D'UNE ELLIPSE. — *a*) Prenons l'ellipse représentée paramétriquement avec les notations usuelles, en coordonnées rectangulaires, par les équations

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi.$$

La normale au point $M(\varphi)$ a pour équation

$$-aX\sin\varphi + bY\cos\varphi + c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0. \tag{4}$$

En annulant la dérivée par rapport au paramètre φ du premier membre de l'équation déduite de l'équation (1) en divisant ses deux membres soit par $\cos\varphi$, soit par $\sin\varphi$, on trouve pour les coordonnées du point caractéristique I de la normale en M

$$X = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \qquad Y = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi. \tag{5}$$

On peut observer que la développée se déduit par affinité de l'astroïde définie par les équations

$$X = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \qquad Y = \frac{c^2}{a}\sin^3\varphi,$$

l'axe d'affinité étant $x'x$ et le rapport d'affinité $-\frac{a}{b}$.

b) La développée d'une ellipse admet quatre points de rebroussement réels, deux sur chacun des axes de coordonnées. Pour les construire on mène les tangentes à l'ellipse en ses sommets A, B, elles se coupent en D, la perpendiculaire menée de D à la droite AB coupe l'axe OA au point R dont l'abscisse est $\frac{c^2}{a}$ et l'axe OB au point S dont l'ordonnée est $-\frac{c^2}{b}$ (fig. 80).

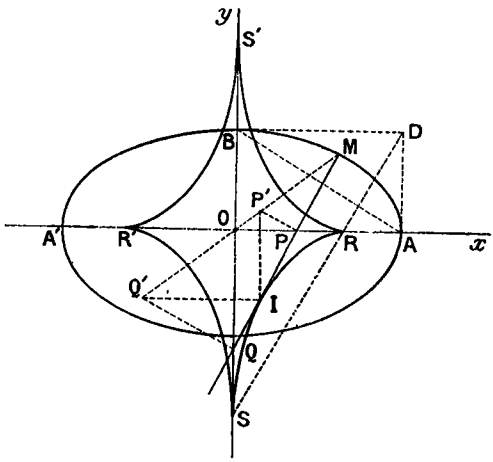


FIG. 80.

c) L'équation tangentielle de la développée de l'ellipse s'obtient en exprimant qu'il existe une valeur φ telle que la droite D (u, v, w) coïncide avec la normale en M [équation (4)] :

$$\frac{-a\sin\varphi}{u} = \frac{b\cos\varphi}{v} = \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{w};$$

d'après ces équations

$$\sin\varphi = \frac{bw}{c^2v},\quad \cos\varphi = \frac{-aw}{c^2u}$$

et enfin

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} - \frac{c^2}{w^2} = 0.$$

3° DÉVELOPPÉE D'UNE HYPERBOLE. — *a*) On peut faire pour l'hyperbole des calculs analogues aux précédents. La branche de droite de l'hyperbole qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

admet pour représentation paramétrique

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\varphi,\qquad y = b\,\mathrm{sh}\,\varphi.$$

Le point caractéristique de la normale en M a pour coordonnées

$$X = \frac{c^2}{a}\,\mathrm{ch}^3\varphi,\qquad Y = -\frac{c^2}{b}\,\mathrm{sh}^3\varphi.$$

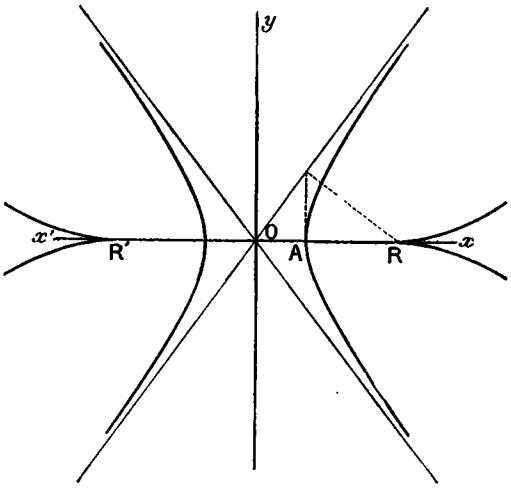


FIG. 81.

b) Le point qui correspond à $\varphi = 0$ est un point de rebroussement de la développée, il est sur la perpendiculaire à une asymptote au point de cette droite qui est sur la tangente au sommet situé sur la branche considérée. La développée admet des branches paraboliques dont les directions asymptotiques sont perpendiculaires aux asymptotes de la courbe. Elle est formée de la courbe représentée paramétriquement par les équations écrites plus haut et de la courbe symétrique par rapport à $y'y$ (fig. 81).

c) Des calculs analogues à ceux du 2°, *c*) donnent l'équation tangentielle de la développée de l'hyperbole :

$$\frac{a^2}{u^2} - \frac{b^2}{v^2} - \frac{c^4}{w^2} = 0.$$

V. ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE COURBES PLANES REPRÉSENTÉES PARAMÉTRIQUEMENT

78. ***Points caractéristiques.*** — **1° Problème.** — Si une courbe variable est définie par une représentation paramétrique, le vecteur-espace $\overrightarrow{OM}$ du point générique de la courbe dépend d'un paramètre u qui fixe M sur la courbe, et d'un paramètre v qui fixe la position de la courbe; autrement dit on donne

$$(1)\quad \overrightarrow{OM} = \vec{F}(u, v) \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} x = f(u\,v) \\ y = g(u, v) \end{cases}$$

la fonction vectorielle $\vec{F}$ est définie, continue, et possède des dérivées partielles continues dans un champ $\mathcal{C}$ de R^2.

Quand on a fixé v, l'égalité (1) détermine une courbe, notée C_v; C_v est représentée paramétriquement en fonction de u, appelé *paramètre de circulation* sur la courbe C_v.

La donnée d'une fonction

$$(2)\qquad u = \theta(v)$$

détermine un point M sur chaque courbe C_v : *peut-on déterminer la fonction* θ *de telle sorte que la courbe*

$$(3)\qquad \overrightarrow{OM} = \vec{F}[\theta(v), v]$$

soit l'enveloppe des courbes C_v?

2° Analyse. — *Supposons qu'il existe une enveloppe* E *pour la famille des courbes* C_v. A la valeur v du paramètre correspond une courbe C_v, tangente à E en un point M dont le paramètre de circulation u sur cette courbe, déterminé par la valeur considérée v, est donné par la formule (2); la formule (3) donne alors le point générique de E.

Au point M, la tangente à C_v est dirigée par le vecteur

$$(4)\qquad \frac{\partial \vec{F}}{\partial u}[\theta(v), v].$$

D'autre part, puisque (3) détermine E, la tangente en M à E est dirigée par le vecteur

$$(5)\qquad \frac{\partial \vec{F}}{\partial u}(\theta, v).\theta'(v) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial v}(\theta, v).$$

Par hypothèse, à cause du contact en M, les vecteurs (4) et (5) sont colinéaires.

On suppose M non stationnaire pour C_φ, c'est-à-dire $\frac{\partial \vec{F}}{\partial u}(\theta, v) \neq \vec{0}$; si de même $\frac{\partial \vec{F}}{\partial v}(\theta, v) \neq \vec{0}$, les vecteurs (4) et (5) ne peuvent être colinéaires que si les vecteurs

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial u}(\theta, v) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \vec{F}}{\partial v}(\theta, v)$$

le sont aussi, pour toute valeur $u = \theta(v)$.

Si $\frac{\partial \vec{F}}{\partial v}(\theta, v) = \vec{0}$, pour toute valeur $u = \theta(v)$, les vecteurs (4) et (5) sont colinéaires à condition que $\theta'(v) \neq 0$.

En résumé, *un point caractéristique* M *de* C_φ *est nécessairement un point du plan où,* $\frac{\partial \vec{F}}{\partial u}$ *n'étant pas nul,* $\frac{\partial \vec{F}}{\partial v}$ *est colinéaire à* $\frac{\partial \vec{F}}{\partial u}$, *ou bien est égal à* $\vec{0}$.

S'il existe une enveloppe E, elle appartient à l'ensemble L des points que l'on vient de considérer.

3° **Synthèse.** — Cherchons les points du plan où les vecteurs $\frac{\partial \vec{F}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{F}}{\partial v}$ sont colinéaires; ces points sont ceux où leurs coordonnées dans le repère S $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ sont proportionnelles, ce qui s'exprime par

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} f'_u(u, v) & f'_v(u, v) \\ g'_u(u, v) & g'_v(u, v) \end{vmatrix} = 0$$

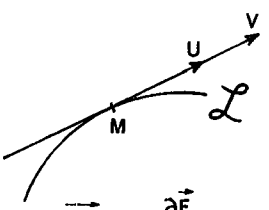


FIG. 82.

La relation (6) est l'équation d'une courbe Σ du plan des u, v.

a) Soit σ un arc de Σ en tout point duquel $\frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \neq \vec{0}$ et $\frac{\partial \vec{F}}{\partial v} \neq \vec{0}$. On exprime, sur σ, les coordonnées u et v en fonction d'un paramètre t (qui peut être l'une des variables u ou v), soit

$$u = \varphi(t), \qquad v = \psi(t).$$

Soit alors $\mathcal{L}$ l'ensemble des points M associés dans le repère S (fig. 82) :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}[\varphi(t), \quad \psi(t)]$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial u}(\varphi, \psi) \cdot \varphi'(t) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial v}(\varphi, \psi) \cdot \psi'(t).$$

Comme $\frac{\partial \vec{F}}{\partial u}(\varphi, \psi)$ et $\frac{\partial \vec{F}}{\partial v}(\varphi, \psi)$ sont colinéaires, $\frac{d\vec{M}}{dt}$ leur est aussi colinéaire; la courbe $\mathcal{L}$ est tangente en M à la courbe C_φ qui passe par ce point; $\mathcal{L}$ fait partie de l'enveloppe E des courbes C_φ.

b) L'étude précédente montre en outre que, si l'on considère la famille des courbes Γ_u obtenues avec le paramètre v de circulation, les courbes Γ_u ont la même enveloppe Γ que les courbes C_v.

c) Supposons, exceptionnellement, qu'il existe un arc σ^* de Σ en tout point duquel $\frac{\partial \vec{F}}{\partial v} = \vec{0}$. Soit

$$u = \varphi(t), \qquad v = \psi(t)$$

une représentation paramétrique de σ^*; soit $\mathfrak{L}^*$ l'ensemble des points M associés dans le repère S :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}[\varphi(t), \psi(t)]$$
$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial u}(\varphi, \psi) \cdot \varphi'(t).$$

Si $\varphi'(t) \neq 0$, il y a contact en M entre $\mathfrak{L}^*$ et C_v; $\mathfrak{L}^*$ fait partie de l'enveloppe E des C_v.

On observera que $\mathfrak{L}^*$ est un lieu de points stationnaires pour les courbes Γ_u.

4° **Conclusion.** — *a*) Lorsque $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u, v)$, le lieu des points du plan où les vecteurs $\frac{\partial \vec{F}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{F}}{\partial v}$ sont distincts de $\vec{0}$ et colinéaires est enveloppe commune des courbes C_v et Γ_u.

b) Un lieu de points stationnaires pour les courbes Γ_u peut être enveloppe des courbes C_v.

5° Exemple. — Reprenons, sur la figure 68, le segment AB de longueur a dont les deux extrémités A et B se déplacent respectivement sur Ox et Oy.

Un point M lié à AB peut être déterminé comme barycentre de A (1) et de B(λ), soit

$$(1) \qquad x = \frac{a\cos\theta}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{a\lambda\sin\theta}{1+\lambda}.$$

La courbe C_λ décrite par ce point quand θ varie seul est une ellipse; la courbe Γ_θ décrite par ce point quand λ varie seul est la droite AB. Les courbes C_λ et Γ_θ ont même enveloppe : trouvons-la.

$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}$	$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}$
$-\frac{a\sin\theta}{1+\lambda}$	$-\frac{a\cos\theta}{(1+\lambda)^2}$
$\frac{a\lambda\cos\theta}{1+\lambda}$	$\frac{a\sin\theta}{(1+\lambda)^2}$

Écrivons que ces vecteurs sont colinéaires, et nous obtenons la relation

$$(2) \qquad \lambda = \operatorname{tg}^2\theta.$$

En tenant compte de (2), les formules (1) donnent

$$x = a\cos^3\theta, \qquad y = a\sin^3\theta.$$

On retrouve l'astroïde obtenue au n° 71, Ex. I.

VI. COURBES ENGENDRÉES PAR UN POINT D'UN CERCLE QUI ROULE SANS GLISSER SUR UNE DROITE OU SUR UN CERCLE

Nous supposons, dans ce sous-chapitre, que l'espace affine est euclidien, et que tous les repères sont orthonormés.

79. Définition générale du roulement sans glissement. — 1° Dans ce sous-chapitre nous utiliserons des notions (longueur d'un arc de courbe, orientation d'un arc et d'une tangente) qui ne sont exposées qu'au chapitre X.

Cependant, étant donné que nous ne considérerons que des droites et des cercles, le lecteur pourra s'en tenir, en première lecture, au point de vue qui lui a été exposé antérieurement, au début de l'étude de la trigonométrie.

2° Dans un plan rapporté à un repère orthonormé (et lié aux axes Ox, Oy) on donne une courbe fixe B (base du roulement) (fig. 83).

Dans un plan II, qui coïncide globalement avec le plan xOy, mais est mobile par rapport à xOy, on donne une courbe C*, fixe dans II. Dans chacune des positions de II par rapport à xOy, C* coïncide avec une courbe C du plan xOy. On suppose que C se déplace dans les conditions suivantes :

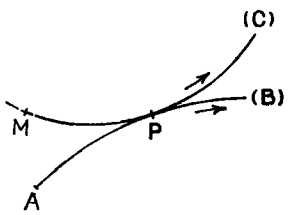


FIG. 83.

a) C reste tangente à B;

b) Soit P un point de contact de B et C; les tangentes en P à B et C sont confondues. **On peut donc orienter B et C de façon que les tangentes positives au point de contact P à ces deux courbes soient confondues** (cf. n° 113). Dans la pratique on dira alors que les sens positifs sur les courbes B et C coïncident en P.

c) **A un point M de la courbe** C (fixe par rapport à cette courbe) **correspond un point A de la courbe** B (fixe par rapport à cette courbe) **de manière que les mesures algébriques des arcs** $\widehat{AP}$ **et** $\widehat{MP}$ **restent égales.**

Lorsque les conditions *a*, *b*, *c* sont remplies, **on dit que la courbe C roule sans glisser sur la courbe B.**

REMARQUE I. — L'une des courbes C et B peut être remplacée par une droite, la valeur algébrique de l'arc est alors remplacée par celle d'un segment de la droite.

REMARQUE II. — Dans ce sous-chapitre, l'une au moins des courbes B et C sera un cercle. Chaque cercle sera orienté dans le sens trigonométrique, de façon à accorder la mesure algébrique des arcs de cercle avec la mesure algébrique des angles au centre correspondants.

Lorsque B et C seront deux cercles tangents extérieurement en P, les sens positifs ne coïncident pas en P; la condition de roulement sans glissement s'exprime alors par le fait que les mesures algébriques des arcs $\widehat{AP}$ et $\widehat{MP}$ restent opposées.

80. *Cycloïde.* — DÉFINITION. — **On appelle cycloïde la courbe engendrée par un point d'un cercle assujetti à rester dans un plan et à rouler sans glisser sur une droite de ce plan.**

1° La droite D sur laquelle roule sans glisser le cercle C est la base de la cycloïde. Soit P le point de contact de la base et du cercle dans l'une des positions de celui-ci. Pour fixer les idées nous supposerons que la droite et le cercle sont orientés de façon qu'au point P le sens positif soit le même sur ces deux

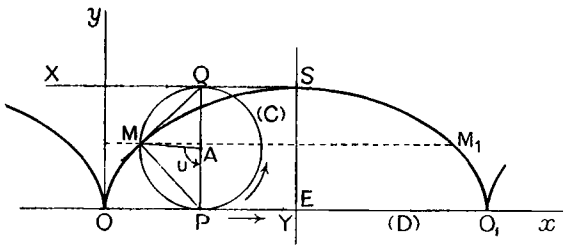


FIG. 84.

lignes. Dans ces conditions, si le point O de la droite est celui qui correspond constamment au point M du cercle,

$$\overline{OP} = \overline{\text{arc } MP},$$

O est la position occupée par M quand le cercle est dans la position C_0 pour laquelle M est sur D (fig. 84).

Prenons O comme origine des coordonnées, pour axe $x'x$ la droite D orientée et pour axe $y'y$ la perpendiculaire en O à $x'x$ orientée de façon que la demi-droite Oy soit du côté de D où reste le cercle C; enfin nous orienterons le plan de façon que Oy soit directement perpendiculaire à Ox. Soit A le centre du cercle dans sa position C, et soit u la détermination de $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP})$ qui est nulle quand M est en O; *dans ces conditions,* si a est est le rayon du cercle

$$\overline{\text{arc } MP} = au = \overline{OP}.$$

Projetons orthogonalement sur les axes le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et le contour OPAM. Nous obtenons, x et y étant les coordonnées de M,

$$x = au + a\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{Ox}), \qquad y = a + a\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{Oy}).$$

Or

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{Ox}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{Ox}) \text{ ou } u + \frac{\pi}{2},$$

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{Oy}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{Ox}) + (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) \text{ ou } u + \pi,$$

d'où

(1) $$\boxed{x = a(u - \sin u), \qquad y = a(1 - \cos u).}$$

Ces formules donnent une représentation paramétrique de la cycloïde.

2° Aux valeurs u et $u + 2\pi$ du paramètre correspondent deux points qui ont même ordonnée et respectivement pour abscisses x et $x + 2a\pi$; on passe du premier au second par la translation $\overrightarrow{OO_1}$, O_1 étant le point d'abscisse $2a\pi$ situé sur Ox, la mesure de cette translation est celle de la longueur du cercle. La cycloïde se compose d'une infinité d'arches qui se déduisent de celle que décrit M quand u varie dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ par une infinité de translations successives représentées par le vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ et par le vecteur $\overrightarrow{O_1O}$. Ces arches correspondent aux différents tours du cercle quand celui-ci roule indéfiniment sur la base.

Aux valeurs u et $2\pi - u$ du paramètre correspondent deux points M et M_1 qui ont même ordonnée et qui ont pour abscisses respectives

$$x = a(u - \sin u),$$
$$x_1 = a(2\pi - u + \sin u).$$

La demi-somme $\frac{x + x_1}{2}$ est égale à $a\pi$, elle est indépendante de u, les points M et M_1 sont symétriques par rapport à la perpendiculaire à $x'x$ au point E dont l'abscisse est la longueur de la moitié du cercle C. Le point S qui correspond à $u = \pi$ est sur cet axe de symétrie de la courbe, on dit que c'est le sommet de l'arche OO_1. La droite Oy et les parallèles à cette droite menées par les points tels que O_1, sont aussi des axes de symétrie pour la courbe comme cela résulte d'ailleurs de la définition de la cycloïde.

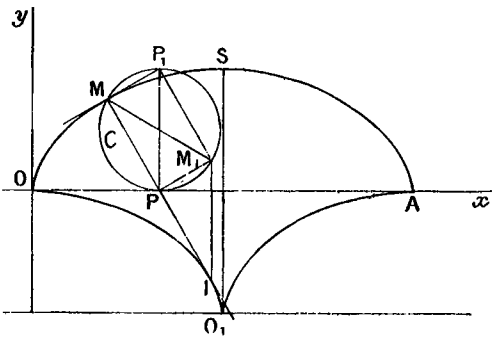


FIG. 85.

3° La tangente au point M(u) a pour équation

$$[x - a(u - \sin u)] \sin u - [y - a(1 - \cos u)] (1 - \cos u) = 0.$$

Après division par $2 \sin\frac{u}{2}$ on trouve aisément

$$(x - au) \cos\frac{u}{2} - (y - 2a) \sin\frac{u}{2} = 0.$$

D'après cette équation, un angle polaire de la tangente en M est $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}$ et cette droite passe par le point Q (au, $2a$) [fig. 84]. Sur la position du cercle générateur qui correspond à M, le point Q est diamétralement opposé au point de contact P de ce cercle et de la base de la cycloïde; en particulier, la tangente en O est Oy. La normale en M à la courbe passe par le point de contact P, ce qui se reconnaît d'ailleurs sur son équation que l'on met facilement sous la forme

$$(x - au) \sin\frac{u}{2} + y \cos\frac{u}{2} = 0.$$

(Ce résultat est une conséquence de la théorie du centre instantané de rotation étudiée en Cinématique.)

4° **Développée d'une cycloïde.** — Pour trouver le point caractéristique de la normale, nous écrivons son équation sous la forme

$$x + y \cot\frac{u}{2} - au = 0.$$

En dérivant, nous obtenons $y = -a(1 - \cos u)$.

Le point caractéristique I (fig. 85) est le symétrique de M par rapport à l'intersection P de la normale en M avec la base de la cycloïde.

Cherchons géométriquement la développée. Soit C le cercle générateur de la cycloïde considérée Γ dans la position qui correspond à M, il est tangent en P à la base de la cycloïde. Soient M_1 et P_1 les points diamétralement opposés à M et P sur C. M_1 décrit la cycloïde Γ_1 déduite de Γ par la translation dont les composantes scalaires sont $a\pi$ et 0; les normales en M et M_1 à Γ et Γ_1 respectivement sont les droites MP et M_1P, et les tangentes sont MP_1 et M_1P_1. La droite MP se déduit de la droite P_1M_1 par la translation $\overrightarrow{P_1P}$, le point caractéristique I de MP est donc l'homologue dans cette translation du point caractéristique M_1 de P_1M_1. La développée de Γ est donc la courbe égale qui s'en déduit par la translation dont les composantes scalaires sont $a\pi$ et $-2a$. *La développée d'une cycloïde est une cycloïde égale.*

5° Deux cycloïdes quelconques sont deux courbes semblables.

81. *Epicycloïdes et Hypocycloïdes.* — DÉFINITION. — **Si dans un plan un cercle (C) roule sans glisser sur un cercle fixe (B), chacun de ses points décrit une courbe appelée hypocycloïde quand (C) est intérieur à (B), et épicycloïde quand les points de (C) sont extérieurs à (B).**

La courbe décrite est donc une épicycloïde soit quand (B) est à l'intérieur de (C), soit quand les cercles (C) et (B) sont tangents extérieurement.

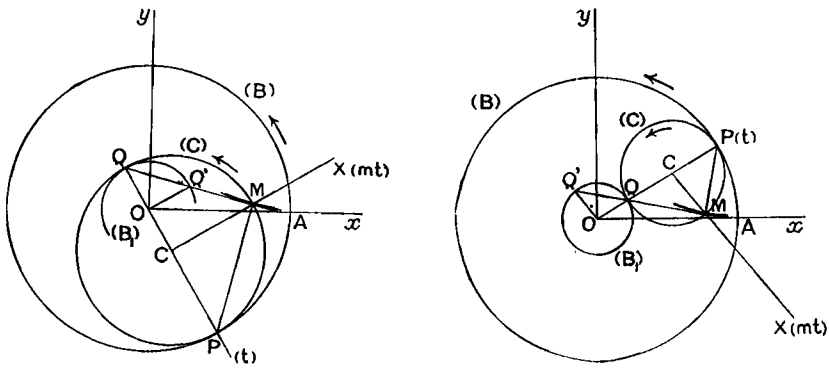


FIG. 86.

Soit M le point de (C) dont nous voulons suivre le déplacement. D'après la définition du roulement sans glissement il lui correspond un point fixe A sur (B) tel que, P étant le point de contact,

$$\overline{\text{arc MP}} = \overline{\text{arc AP}} \qquad \text{ou} \qquad \overline{\text{arc MP}} = -\overline{\text{arc AP}}$$

suivant que les sens positifs choisis sur (C) et (B) coïncident, ou non, au point de contact.

Orientons les cercles dans le sens trigonométrique et prenons pour axe $x'x$ l'axe OA orienté du centre O de (B) vers A; l'axe $y'y$ est l'axe directement perpendiculaire mené par O. Le paramètre sera la mesure algébrique t de celui des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$ qui correspond à la mesure choisie pour $\overline{\text{arc AP}}$; en appelant R le rayon du cercle (B), $\overline{\text{arc AP}} = Rt$.

C étant le centre du cercle mobile (C), soit u la mesure algébrique de celui des angles $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CP})$ qui est nul lorsque P est en A ; en appelant r le rayon de (C), arc $\overline{MP} = ru$.

1° *Si le contact est intérieur* (fig. 86 et 87), les sens positifs marqués sur les deux cercles coïncident en P, et l'égalité arc $\overline{MP}$ = arc $\overline{AP}$ se traduit par

$$Rt = ru.$$

Un angle polaire du vecteur $\overrightarrow{CM}$ est

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{CM})$$

ou, puisque $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{CP}$ ont même sens,

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{CM}) = t - u.$$

D'autre part, dans la direction orientée par l'angle t,

$$\overline{OC} = \overline{OP} + \overline{PC} \quad \text{ou} \quad R - r.$$

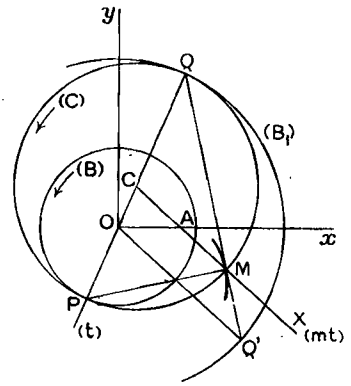


FIG. 87.

Le vecteur $\overrightarrow{OC}$ a pour affixe

$$(R - r)e^{it}$$

le vecteur $\overrightarrow{CM}$ a pour affixe

$$re^{i(t-u)}.$$

et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe

$$(1) \qquad z = (R - r)e^{it} + re^{i(t-u)}$$

avec $$u = \frac{R}{r}t.$$

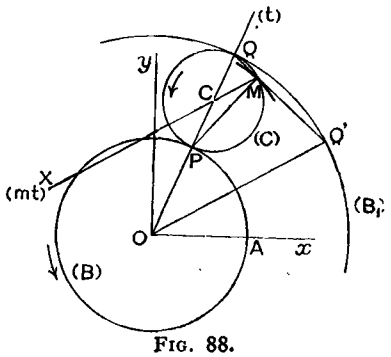


FIG. 88.

2° *Si le contact est extérieur* (fig. 88), au point de contact P les sens positifs choisis sur (B) et (C) sont opposés et le roulement sans glissement se traduit par l'égalité

$$\text{arc } \overline{MP} = -\text{arc } \overline{AP} \qquad \text{ou} \qquad Rt = -ru.$$

Un angle polaire du vecteur $\overrightarrow{CM}$ est

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{CM});$$

or maintenant $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{CP}$ sont de sens contraires.

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{CM}) = t + \pi - u.$$

D'autre part, dans la direction orientée par l'angle t,

$$\overline{OC} = \overline{OP} + \overline{PC} = R + r.$$

Le vecteur $\overrightarrow{OC}$ a pour affixe $(r + R)\,e^{it}$.

Le vecteur $\overrightarrow{CM}$ a pour affixe $re^{i(\pi+t-u)}$ ou $-re^{i(t-u)}$

et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe

$$(2) \qquad z = (R + r)e^{it} - re^{i(t-u)} \quad \text{avec} \quad u = -\frac{R}{r}t.$$

3° **Formules générales.** — Pour étudier les proprlétés générales des courbes cycloïdales (on désigne ainsl l'ensemble des épicycloïdes et des hypocycloïdes), nous allons grouper les formules (1) et (2) dans une formule unique.

Nous poserons $\rho = \overline{(PC)}_t$.

ρ est un nombre algébrique égal à r si le contact des cercles (C) et (B) est extérieur et égal à $-r$ si le contact est intérieur. Alors

$$(3) \qquad z = (R + \rho)e^{it} - \rho e^{i\left(1+\frac{R}{\rho}\right)t}.$$

Pour simplifier nous introduirons la constante

$$m = 1 + \frac{R}{\rho}.$$

$$\begin{cases} m > 0 & \text{pour} \quad \rho > 0 \quad \text{et} \quad \rho < -R : \text{épicycloïde} \\ m < 0 & \text{pour} \quad -R < \rho < 0 : \text{hypocycloïde} \end{cases}$$

$$R + \rho = m\rho.$$

Finalement

$$(4) \qquad z = \rho\,[me^{it} - e^{mit}].$$

On en déduit les coordonnées du point générique M d'une courbe cycloïdale Γ

$$\begin{cases} x = \rho(m\cos t - \cos mt) \\ y = \rho(m\sin t - \sin mt) \end{cases}$$

Nous appellerons $\overrightarrow{CX}$ l'axe orienté par l'angle polaire mt; cette direction orientée est celle du vecteur $\overrightarrow{CM}$ si le contact est intérieur, la direction opposée à $\overrightarrow{CM}$ si le contact est extérieur.

4° **Symétrie et répétitions.** —

a)

t	$t + h$	Si $e^{ih} = e^{mih}$,
e^{it}	$e^{it}.e^{ih}$	c'est-à-dire
e^{mit}	$e^{mit}.e^{mih}$	$(m-1)h = 2\pi$ $\quad [2\pi]$
		z devient $z.e^{ih}$.

c'est-à-dire que le point M' $\left(t + \frac{2\pi}{m-1}\right)$ se déduit du point M(t) par la rotation $\left(O, \frac{2\pi}{m-1}\right)$. Pour construire Γ, on fait varier t sur un intervalle d'amplitude $\frac{2\pi}{m-1}$, puis on fait subir à l'arc γ obtenu, toutes les rotations successives de centre O, d'amplitude $\frac{2\pi}{m-1}$.

b) Γ est une courbe fermée si, et seulement s'il existe un entier k tel que $\frac{2\pi}{m-1} \times k$ soit un multiple de 2π; la condition pour qu'il en soit ainsi est que m soit rationnel; Γ est alors unicursale.

c) $\begin{array}{c|c} t & -t \\ z & \bar{z} \end{array}$ OA est un axe de symétrie de Γ,

si A_1, A_2, ... sont les points d'angles polaires $\frac{2\pi}{m-1}$, $\frac{4\pi}{m-1}$, ... sur le cercle (B), OA_1, OA_2, .. sont aussi des axes de symétrie.

d) Du fait que Γ est invariante dans la symétrie d'axe OA, et dans la rotation $\left(O, \frac{2\pi}{m-1}\right)$, Γ est aussi invariante dans la symétrie d'axe $O\Delta\left(\text{angle polaire } \frac{\pi}{m-1}\right)$, et aussi dans les symétries ayant pour axes les droites déduites de $O\Delta$ par les rotations successives $\left(O, \frac{2\pi}{m-1}\right)$.

5° **Tangente à une courbe cycloïdale.** — La dérivée z' de z par rapport à t est donnée par

$$z' = im\rho\,[e^{it} - e^{imt}]$$

Faisons apparaître la demi-somme $i\frac{m+1}{2}t$ des arguments des deux exponentielles.

$$z' = -im\rho e^{i\frac{m+1}{2}t}\left[e^{i\frac{m-1}{2}t} - e^{-i\frac{m-1}{2}t}\right]$$

$$z' = 2m\rho \sin\frac{m-1}{2}t \quad e^{\frac{m+1}{2}it}.$$

La tangente en M à Γ a pour angle polaire

$$\varphi = \frac{m+1}{2}t;$$

sa direction est celle de la bissectrice des directions orientées $\overrightarrow{CX}(mt)$ et $\overrightarrow{OP}(t)$. Il en résulte que la tangente en M est perpendiculaire à MP (ce résultat est une conséquence de la théorie du centre instantané de rotation étudiée en Mécanique.) La tangente en M passe par le point Q diamétralement opposé à P sur (C).

$$(\overline{OQ})_t = (\overline{OP})_t + 2(\overline{PC})_t = (m+1)\rho$$

que l'on comparera avec

$$(\overline{OP})_t = (m-1)\rho.$$

Q décrit un cercle (B_1) concentrique à (B); Γ est située dans la couronne circulaire limitée par (B) et (B_1)

$z' = 0$ lorsque $\frac{m-1}{2}t = 0$ [mod. π]

ou $t = \frac{2\pi}{m-1} \times k, \quad k \in Z$

les points A, A_1, A_2 ... de Γ situés sur (B) sont des points de rebroussement de Γ.

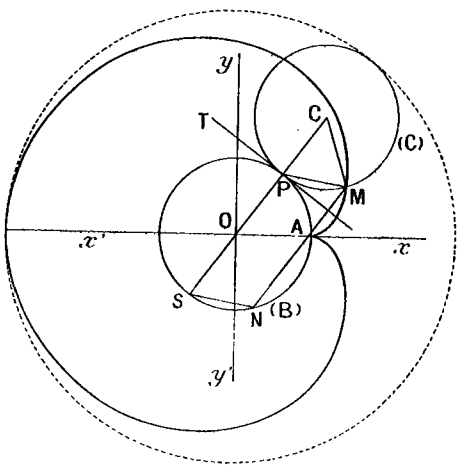


FIG. 89.

6° **Exemples usuels de courbes cycloïdales.** — *a*) Pour $\rho = R$, $m = 2$, la courbe est une épicycloïde à un rebroussement, ou cardioïde (fig. 89).

Les cercles (B) et (C) sont symétriques par rapport à la tangente commune PT en P, et les points A et M se correspondent dans cette symétrie.

Dans la translation $\overrightarrow{OC}$ qui transforme (B) en (C), M est l'image de N; puisque NM = 2R, M décrit la conchoïde du cercle (B) par rapport au point A, la longueur constante ajoutée à chaque rayon vecteur étant le diamètre de (B).

b) pour $\rho = \frac{R}{2}$, $m = 3$, la courbe est une épicycloïde à deux rebroussements, ou néphroïde (fig. 90).

c) pour $\rho = -\frac{R}{2}$, $m = -1$, $z = R\cos t$; la courbe Γ se réduit au diamètre AA' parcouru alternativement de A en A' et de A' en A. Ce fait résulte (fig. 91) de ce que si M est l'intersection du diamètre AA' avec le cercle (C) de diamètre OP, l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$ intercepte l'arc R*t* sur (B), et l'angle (OM, OP) inscrit dans (C) intercepte l'arc $\frac{R}{2} \times 2t$ égal au précédent.

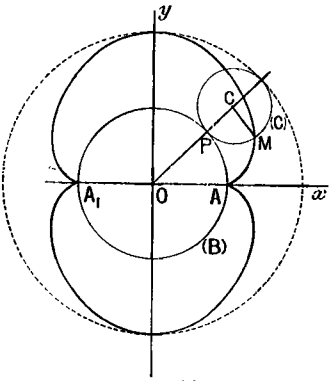


FIG. 90.

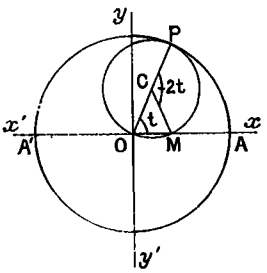


FIG. 91.

d) pour $\rho = -\frac{R}{3}$, $m = -2$, on a l'hypocycloïde à trois rebroussements, que nous étudierons au n° 84.

e) pour $\rho = -\frac{R}{4}$, $m = -3$, on a l'hypocycloïde à quatre rebroussements ou astroïde

$$z = \frac{R}{3}(3e^{it} + e^{-3it}) \Longrightarrow \begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \end{cases}$$

Cette courbe a déjà été obtenue du n° 71 comme enveloppe d'un segment de longueur constante dont les extrémités se déplacent sur deux droites perpendiculaires, et est représentée sur la figure 68.

En nous reportant à cette figure, trouvons géométriquement le lieu géométrique du point caractéristique M.

Lions ce point au cercle γ qui a pour points diamétralement opposés le point C et le milieu D de AB; soit ω le centre de γ; écrivons l'égalité

$$(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega C}) = 2(DM, DC) \qquad \text{ou} \qquad 2(DA, DC);$$

or les droites DA et DC sont symétriques en direction par rapport aux axes, par suite

$$(DA, DC) = 2(Ox, OC) \qquad \text{ou} \qquad 2\theta,$$

et finalement $(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega C}) = 4\theta$.

Les cercles γ et Γ étant orientés tous les deux dans le sens trigonométrique, on peut écrire

$$\overline{\text{arc MC}} = \frac{a}{4} \times 4\theta \qquad \text{ou} \qquad a\theta,$$

et, si C_0 est le point d'abscisse *a* sur l'axe Ox,

$$\overline{\text{arc } C_0C} = a\theta;$$

le cercle γ roule sans glisser à l'intérieur de Γ et M décrit une hypocycloïde à quatre rebroussements.

7° Deux courbes cycloïdales associées à une même valeur de *m*, c'est-à-dire du rapport $\frac{R}{\rho}$, sont deux courbes semblables.

Par exemple, les hypocycloïdes à trois [resp. quatre] rebroussements sont des courbes semblables à l'une d'elles.

82. *Double génération d'une courbe cycloïdale.* — Avec les notations du n° 81

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$$

affixe de $\overrightarrow{OC}$: $\rho m e^{it}$

affixe de $\overrightarrow{CM}$: $-\rho e^{imt}$.

Introduisons le quatrième sommet C' du parallélogramme construit sur O, C, M :

Affixe de $\overrightarrow{OC'}$: $-\rho e^{imt}$

Affixe de $\overrightarrow{C'M}$: $\rho m e^{it}$.

Peut-on trouver des constantes ρ', m' et une variable t' telles que

$$\begin{cases} -\rho e^{imt} = \rho' m' e^{it'} \\ \rho m e^{it} = -\rho' e^{im't'} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\rho = \rho' m'; \ mt = t' \\ \rho m = -\rho'; \ t = m't'. \end{cases}$$

Ces quatre relations sont compatibles et donnent

$$mm' = 1, \qquad \rho' = -\rho m,$$

La courbe Γ peut donc être engendrée d'une seconde façon par le roulement d'un cercle sur un autre :

le cercle fixe a pour rayon $R' = (m' - 1)\rho' = (m - 1)\rho = R$, il coïncide avec (B).

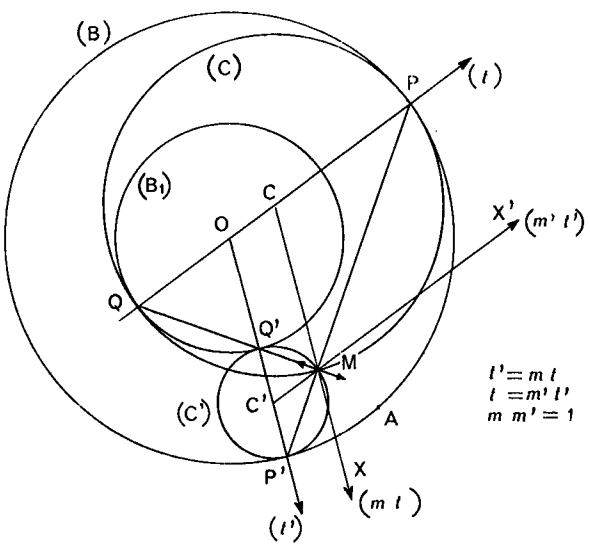


FIG. 92.

le cercle mobile (C') touche (B) au point P' d'angle polaire t', et son centre est tel que

$$(\overline{P'C'})_{t'} = \rho' = -\rho m \quad \text{ou encore} \quad -\rho - R.$$

Pour une hypocycloïde, les deux cercles (C) et (C') sont tous deux intérieurs à (B) (fig. 92).

Pour une épicycloïde, les deux cercles (C) et (C') ont leurs points extérieurs à (B), l'un avec un contact intérieur, l'autre avec un contact extérieur.

83. ***Propriétés tangentielles des courbes cycloïdales.*** — 1° Reprenons les notations et les résultats du n° 81.

L'équation de la tangente en M à Γ est

$$(1) \qquad x \sin\frac{m+1}{2}t - y\cos\frac{m+1}{2}t - \rho(m+1)\sin\frac{m-1}{2}t = 0.$$

Cherchons son équation normale : orientons la perpendiculaire à MQ par l'angle

$$\frac{m+1}{2}t - \frac{\pi}{2} = \theta,$$

l'équation (1) prend la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta - b\sin k\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \text{avec } b = \rho(m+1), \qquad k = \dfrac{m-1}{m+1}; \end{cases}$$

rappelons que $b = (\overline{OQ})_t$.

La podaire de O par rapport à Γ est engendrée par le point H tel que

$$(\overline{OH})_\theta = b\sin k\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

2° Inversement toute courbe plane dont l'équation d'Euler est de la forme

$$p = b\sin(k\theta + \alpha)$$

où b, k, α sont des constantes, $|k| \neq 1$, est une courbe cycloïdale.

En faisant tourner les axes d'un angle convenable autour de O, on peut faire en sorte que cette équation d'Euler prenne la forme

$$p = b\sin k\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

et l'on peut alors déterminer ρ, R, m à partir de (2).

3° Cherchons le second point d'intersection de la tangente avec le cercle (B_1).

Une représentation paramétrique de ce cercle est fournie par

$$x = (m+1)\rho\cos\omega, \qquad y = (m+1)\rho\sin\omega$$

l'équation donnant ω est

$$\sin\left(\frac{m+1}{2}t - \omega\right) = \sin\frac{m-1}{2}t$$

d'où

$$\omega = t \quad [2\pi] \quad \text{qui redonne Q,}$$
$$\omega = mt + \pi \quad [2\pi] \quad \text{qui donne Q'.}$$
$$(\overline{OQ'})_{mt+\pi} = (m+1)\rho \qquad \text{ou} \qquad (\overline{OQ'})_{mt} = -(m+1)\rho.$$

On en déduit

$$\frac{\overline{MQ'}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CQ}} = \frac{-m\rho}{\rho} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\overline{MQ'}}{\overline{MQ}} = -m. \qquad (3)$$

Le point M partage le segment QQ' dans un rapport algébrique constant (1); Q et Q' sont confondus entre eux, et avec le point M associé, sur les axes de symétrie d'angles polaires $\dfrac{\pi}{m-1} + \dfrac{2k\pi}{m-1}$.

---

(1) On retrouve aussi ce résultat en observant que Q [resp. Q'] est diamétralement opposé à P [resp. P'] sur le cercle (C) [resp. (C')] dont le roulement sans glissement sur (B engendre Γ.

En outre, suivant le signe de $(m+1)\rho = R + 2\rho$, l'angle polaire ψ de Q sur (B_1) est t ou $t + \pi$, celui de Q', ψ', est $mt + \pi$ ou mt, si bien qu'entre ces deux angles polaires existe une relation de la forme

$$\psi' = m\psi + \beta \qquad (4)$$

où β est une constante.

4° Montrons que les propriétés que traduisent les formules (3) et (4) sont équivalentes, et caractéristiques des courbes cycloïdales.

Sur le cercle $(\Sigma)(O, a)$ on donne les points Q et Q' d'angles polaires variables t et t'; la droite (D) qui joint QQ' a pour équation (fig. 93)

$$\begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0 & t = \theta + u \\ \text{avec} \quad p = a\cos u & t' = \theta - u \end{cases}$$

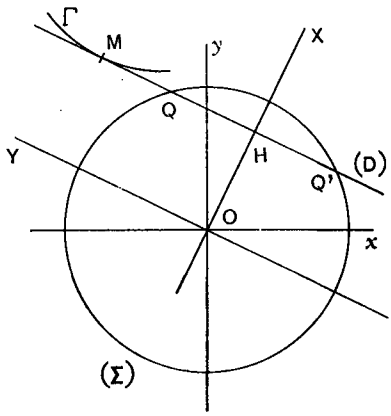


FIG. 93.

Le point caractéristique M de (D), dans le système cartésien XOY défini par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = \theta$ a pour coordonnées

$$X = p \qquad Y = \frac{dp}{d\theta} \quad \text{ou} \quad -a\sin u \cdot \frac{du}{d\theta}$$

et le rapport

$$\frac{\overline{MQ'}}{\overline{MQ}} = \frac{-a\sin u - \dfrac{dp}{d\theta}}{a\sin u - \dfrac{dp}{d\theta}} \quad \text{ou} \quad \frac{-d\theta + du}{d\theta + du}.$$

$$\frac{\overline{MQ'}}{\overline{MQ}} = \lambda \iff \frac{-dt'}{dt} = \lambda \iff t' = -\lambda t + \beta$$

λ et β étant deux constantes.

Le fait que M divise algébriquement le segment QQ' dans un rapport constant λ est équivalent au fait que les angles polaires t et t' de Q et Q' sont liés par une relation de la forme $t' = -\lambda t + \beta$.

L'équation d'Euler de l'enveloppe Γ de (D) étant alors

$$p = a\cos(k\theta + \beta_1),$$

$$k = \frac{1+\lambda}{1-\lambda},$$

Γ est une courbe cycloïdale.

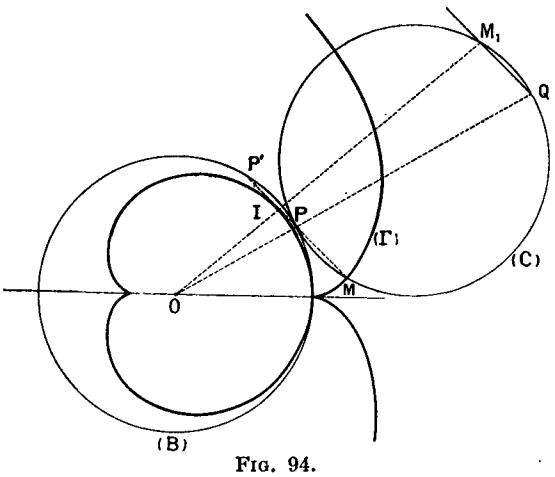


FIG. 94.

5° **Développée d'une courbe cycloïdale.** — Soit (B) le cercle de base, et (C) le cercle qui roule sans glisser sur (B); M est le point, lié à (C) qui décrit la courbe Γ; la tangente en M passe par le point Q diamétralement opposé sur (C) du point P où (C) est tangent à (B).

Soit M_1 le point diamétralement opposé à M sur (C); M_1 décrit une courbe Γ_1, égale à Γ par rotation de centre O, et ayant pour tangente M_1Q (fig. 94).

La normale MP en M à Γ est homothétique de la droite M_1Q dans l'homothétie

$$\left(O, \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}\right);$$

le point caractéristique I de MP est l'homologue du point caractéristique M_1 de M_1Q dans l'homothétie précédente.

Finalement on passe de Γ à sa développée par une similitude de centre O.

Si MP recoupe en P′ le cercle (B), OP′ et MM_1 sont parallèles, et I, M, P, P′ forment une division harmonique.

Analytiquement, l'équation d'Euler de Γ est

$$(\overline{OH})_\theta = b \sin(k\theta + \alpha);$$

celle de la développée Γ′ est

$$(\overline{OH'})_{\theta+\frac{\pi}{2}} = bk \sin\left(k\theta + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

ou encore, en posant $\theta + \frac{\pi}{2} = \theta'$

$$(\overline{OH'})_{\theta'} = bk \sin\left(k\theta' + \alpha + \frac{\pi}{2} - k\frac{\pi}{2}\right)$$

ce qui montre que Γ′ est semblable à Γ.

84. ***Hypocycloïde à trois rebroussements.*** — Pour montrer comment un problème d'enveloppe de droite conduisant à une courbe cycloïdale peut se traiter directement, sans faire appel à aucune connaissance érudite, nous allons étudier le problème suivant.

1° **Étude analytique.** — Considérons le cercle (Σ) (O, *a*), un axe Ox mené par O, et déterminons deux points variables Q et Q′ sur (Σ) par leurs angles polaires

$$\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OQ}), \qquad \varphi' = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OQ'}).$$

Cherchons l'enveloppe de la droite (D) joignant Q et Q′ lorsque

$$\varphi' = -2\varphi.$$

(Le point Q′, dit point *secondaire*, se déplace sur Σ en sens contraire du point Q, dit point *primaire*, avec une vitesse angulaire double de celle de Q.)

Si H est la projection orthogonale de O sur (D),

$$(\overline{OH})_{-\frac{\varphi}{2}} = a \cos\frac{3\varphi}{2}$$

et l'équation normale de (D) est

$$x\cos\frac{\varphi}{2} - y\sin\frac{\varphi}{2} - a\cos\frac{3\varphi}{2} = 0. \tag{1}$$

Le point caractéristique M de (D) appartient à la droite (D′) d'équation

$$x\sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2} - 3a\sin\frac{3\varphi}{2} = 0. \tag{2}$$

L'affixe $z = x + iy$ du point M s'obtient en combinant linéairement par 1 et i les premiers membres des équations (1) et (2), ce qui donne

$$ze^{i\frac{\varphi}{2}} = a\left[\cos\frac{3\varphi}{2} + 3i\sin\frac{3\varphi}{2}\right]$$

En transformant le second membre par les formules d'Euler,

$$ze^{i\frac{\varphi}{2}} = a\left[2e^{3i\frac{\varphi}{2}} - e^{-3i\frac{\varphi}{2}}\right]$$

et finalement

$$z = a\left[2e^{i\varphi} - e^{-3i\varphi}\right]$$

d'où

$$(3)\quad \begin{cases} x = a(2\cos\varphi - \cos 2\varphi) \\ y = a(2\sin\varphi + \sin 2\varphi) \end{cases}$$

$\overrightarrow{OM}$ est la somme du vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ d'affixe $2ae^{i\varphi}$ et du vecteur $\overrightarrow{\omega M}$ d'affixe

$$-ae^{-2i\varphi} = ae^{i(\pi-2\varphi)}.$$

Soit (C) le cercle (ω, a), (B) le cercle $(O, 3a)$, N le point diamétralement opposé à M

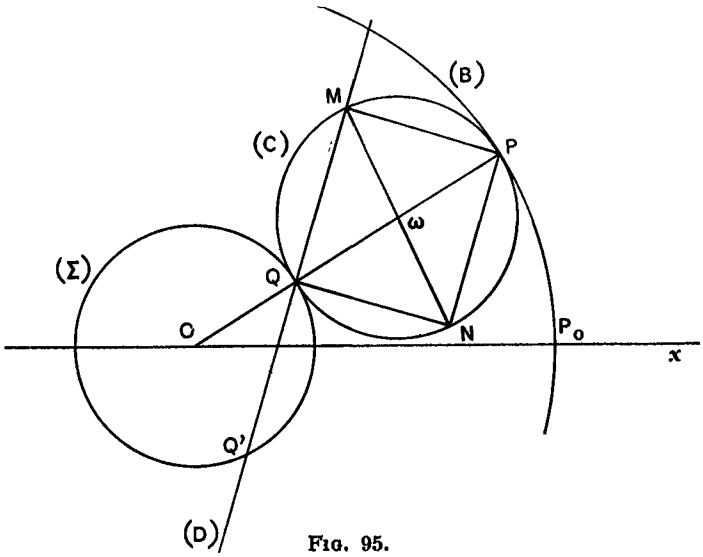


Fig. 95.

sur (C) : l'angle polaire de $\overrightarrow{\omega N}$ est -2φ, (fig. 95) et par suite

$$\left(\overrightarrow{\omega N}, \overrightarrow{\omega P}\right) = 3\varphi \implies \overline{\text{arc } NP} = 3a\varphi.$$

Si P_0 est le point d'abscisse $3a$ sur (B) $\overline{\text{arc } P_0P} = 3a\varphi$;
si on lie N et M à (C), (C) roule sans glisser à l'intérieur de (B), et M engendre une hypocycloïde à trois rebroussements.

2° **Étude géométrique.** — Soit S le point commun à la droite D et à la droite D_1 de la même famille $\left(\overline{\text{arc } QQ_1} = a\Delta\varphi, \overline{\text{arc } Q'Q'_1} = -2a\Delta\varphi\right)$. S est extérieur au segment QQ'; les triangles SQQ_1, SQ'_1Q' sont semblables (fig. 96)

$$\frac{SQ}{SQ'_1} = \frac{QQ_1}{Q'Q'_1};$$

les cordes QQ_1, $Q'Q'_1$ sont des infiniment petits équivalents aux arcs QQ_1, $Q'Q'_1$, par suite $\frac{QQ_1}{Q'Q'_1}$ tend vers $\frac{1}{2}$, et S tend vers le point M de QQ' défini par

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{MQ'}} = \frac{1}{2},$$

M est le symétrique de Q' par rapport à Q. Le point caractéristique M étant déterminé, la normale en M à l'enveloppe l' rencontre OQ en un point P, et si on lie M au cercle (C) de diamètre PQ, on montre comme au 1° que (C) roule sans glisser sur (B).

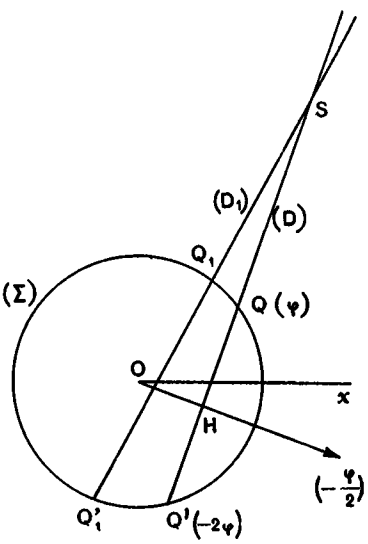


Fig. 96.

3° **Cercle tritangent.** — Les points Q et Q′ sont confondus sur (Σ) lorsque $\varphi' = \varphi + 2k\pi$, ce qui donne $\varphi = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$: en ces trois points, E, E_1, E_2 du cercle (Σ), l'hypocycloïde Γ est tangente à (Σ); d'où le nom de cercle tritangent donné à (Σ) (fig. 97).

La tangente QQ′ passe par le centre O si Q et Q′ sont diamétralement opposés sur (Σ), c'est-à-dire lorsque $\varphi' = \pi + \varphi + 2k\pi$, ce qui donne $\varphi = \pi, -\frac{\pi}{3}, +\frac{\pi}{3}$, d'où les positions U, U_1, U_2 du point primaire, et les positions A, A_1, A_2 du point générique, points de rebroussement pour Γ, situés sur le cercle (B).

Les propriétés du cercle tritangent sont proposées à l'exercice n° 44, page 195.

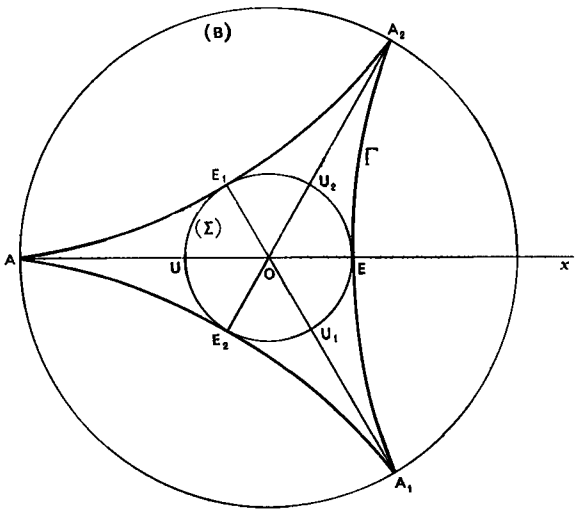


FIG. 97.

4° **Équation d'Euler d'une hypocycloïde à trois rebroussements.** — *a*) L'équation (1) du 1°, en posant $\theta = -\frac{\varphi}{2}$, donne l'équation de la droite (D) sous la forme

$$x\cos\theta + y\sin\theta = a\cos 3\theta;$$

l'équation d'Euler de l'hypocycloïde Γ à trois rebroussements correspondante est

$$(\overline{OH})_\theta = a\cos 3\theta.$$

b) Une similitude de centre O, d'angle α, de rapport *k*, transforme H en H′, (D) en (D′),

$$(\overline{OH'})_{\theta'} = k\,a\cos 3(\theta' - \alpha) \qquad (\theta' = \alpha + \theta).$$

Une similitude de centre quelconque, d'angle α, de rapport *k*, est le produit de la similitude précédente par une translation; elle transforme (D) en une droite (D_1) parallèle à (D′), d'équation

$$(x - l)\cos\theta' + (y - m)\sin\theta' = ka\cos 3(\theta' - \alpha).$$

L'équation d'Euler d'une hypocycloïde à trois rebroussements, quelconque, $\mathcal{H}$ est donc

$$(\overline{OK})_\theta = ka\cos 3(\theta - \alpha) + l\cos\theta + m\sin\theta,$$

le second membre peut se mettre sous la forme $\Phi_3(\cos\theta, \sin\theta)$, Φ_3 étant un polynôme homogène, du troisième degré, en $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Inversement, soit (Δ) la droite donnée par

$$x\cos\theta + y\sin\theta = \Phi_3(\cos\theta, \sin\theta); \tag{4}$$

$$\Phi_3(\cos\theta, \sin\theta) = \lambda\cos^3\theta + \mu\sin^3\theta + \sin\theta\cos\theta(\lambda'\cos\theta + \mu'\sin\theta)$$

est le polynôme homogène le plus général de degré 3 en $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Les formules d'Euler permettent d'exprimer Φ_3 en fonction linéaire de $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$:

$$\Phi_3(\cos\theta, \sin\theta) = l\cos\theta + m\sin\theta + p\cos 3\theta + q\sin 3\theta.$$

En portant l'origine au point $O_1(l, m)$, (Δ) a pour équation

$$x_1\cos\theta + y_1\sin\theta = p\cos 3\theta + q\sin 3\theta;$$

si H_1 est la projection de O_1 sur (Δ),

$$(\overline{O_1H_1})_\theta = b\cos(3\theta + \beta);$$

b et β étant des constantes ($b > 0$).

Les points communs à (Δ) et un cercle (O_1, b) sont donnés par

$$\cos(t - \theta) = \cos(3\theta + \beta),$$

ce sont les points d'angles polaires

$$\begin{cases} t_1 = 4\theta + \beta \\ t_2 = -2\theta - \beta, \end{cases}$$

respectivement point secondaire et point primaire dans la génération tangentielle d'une hypocycloïde à trois rebroussements, comme au 1°.

Toute droite (Δ) d'équation (4) enveloppe donc une hypocycloïde $\mathcal{H}$ à trois rebroussements.

Le cercle (O_1, b) en est le cercle tritangent, et l'on peut placer $\mathcal{H}$ en déterminant les points de contact avec le cercle O_1, points pour lesquels $t_1 = t_2$ [mod. 2π]. On peut aussi chercher les droites Δ qui sont tangentes de rebroussement ($p\cos 3\theta + q\sin 3\theta = 0$).

VII. DUALITÉ EN GÉOMÉTRIE PLANE

85. *Famille de droites définie par une équation implicite.* — 1° Problème. — Partant d'une courbe Γ donnée par une représentation ponctuelle paramétrique ou implicite, nous avons formé son équation tangentielle, c'est-à-dire une condition nécessaire et suffisante qui lie u, v, w pour que la droite

$$ux + vy + w = 0 \tag{D) (1}$$

soit tangente à Γ.

Examinons le problème inverse : on donne une équation homogène

$$\Phi(u, v, w) = 0; \tag{2}$$

pour l'étude de certaines équivalences, on supposera que le degré d'homogénéité n n'est pas nul; on considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des droites D dont les coordonnées tangentielles u, v, w sont liées par la relation (2). *Peut-on définir une enveloppe pour la famille $\mathcal{F}$?*

2° **Enveloppe déterminée par** $\Phi(u, v, w) = 0$. Soit (a, b, c) une solution de (2), correspondant à une droite D_0 de $\mathcal{F}$. L'étude des courbes définies par une équation implicite (n° 53), montre, — sous réserve de conditions de continuité pour la fonction Φ et ses dérivées partielles, et sous réserve que

$$\Phi'_u(a, b, c), \qquad \Phi'_v(a, b, c), \qquad \Phi'_w(a, b, c)$$

ne sont pas tous nuls, — qu'il existe dans un voisinage de (a, b, c) des solutions de (2) de la forme

$$u = \varphi(\lambda), \qquad v = \psi(\lambda), \qquad w = \theta(\lambda)$$

avec

$$a = \varphi(\lambda_0), \qquad b = \psi(\lambda_0), \qquad c = \theta(\lambda_0),$$

les fonctions φ, ψ, θ étant continues et possédant des dérivées continues sur un voisinage de λ_0.

La famille continûment dérivable de droites D ainsi mise en évidence admet une enveloppe γ.

Nous n'envisagerons dans ce qui suit que les cas où l'équation (2) définit un ensemble de telles enveloppes.

Nous appellerons enveloppe définie par l'équation (2) la courbe Γ qui est la réunion de toutes les enveloppes telles que γ; la famille $\mathcal{F}$ est celle des tangentes à Γ.

3° **Droite régulière; droite singulière.** — Une droite $D(u, v, w)$ de la famille $\mathcal{F}$ est dite *régulière* si Φ'_u, Φ'_v, Φ'_w ne sont pas simultanément nulles

singulière si $\Phi'_u = 0, \qquad \Phi'_v = 0, \qquad \Phi'_w = 0.$ (3)

D'après la formule d'Euler pour les fonctions homogènes, et puisque $n \neq 0$,

$$(3) \implies (2);$$

il suffit que D vérifie (3) pour qu'elle appartienne à la famille $\mathcal{F}$, dont elle est alors une droite singulière.

Les notions précédentes sont indépendantes du repère utilisé.

4° **Droites de la famille $\mathcal{F}$ issues d'un point de l'une d'elles.** — Soit $D(u, v, w)$ une droite de la famille $\mathcal{F}$. Déterminons un point P de D par l'intersection de D avec une droite quelconque d(U, V, W).

Toute droite issue de P a des coordonnées tangentielles de la forme

$$u + \rho U, \qquad v + \rho V, \qquad w + \rho W,$$

et les ρ des droites de la famille $\mathcal{F}$ issues de P sont solutions de l'équation

(4) $\Psi(\rho) = 0$, avec $\Psi(\rho) = \Phi(u + \rho U, \ v + \rho V, \ w + \rho W)$.

Par hypothèse $\Psi(0) = \Phi(u, v, w) = 0$

D'autre part : $\Psi'(0) = U\Phi'_u(u, v, w) + V\Phi'_v(u, v, w) + W\Phi'_w(u, v, w)$.

a) si D est une droite régulière, $\rho = 0$ est racine simple de (4), sauf si d contient le point $M(\Phi'_u, \Phi'_v, \Phi'_w)$ (ce point est bien situé sur D d'après la formule d'Euler).

b) si D est une droite singulière, $\Psi'(0) = 0$; quel que soit le choix de P sur D, $\rho = 0$ est racine double au moins de l'équation (4).

Par tout point d'une droite singulière passent deux droites au moins confondues de la famille $\mathcal{F}$.

Le paragraphe suivant va donner l'interprétation géométrique du point exceptionnel d'une droite régulière.

86. ***Équation ponctuelle d'une courbe définie par une équation tangentielle.*** — Nous conservons les notations du n° précédent, et nous poursuivons le numérotage des relations.

1° **Point caractéristique d'une droite de la famille $\mathcal{F}$.** — *a*) Appliquons le résultat du n° **74**; les trois paramètres étant homogènes, on peut supposer que u est fixe; le point caractéristique M de la droite D, dépendant des deux paramètres v et w liés par (2) vérifie la relation

$$\frac{y}{\Phi'_v} = \frac{1}{\Phi'_w}. \tag{5}$$

Si de même on imagine que v est fixe, M vérifie la relation

$$\frac{x}{\Phi'_u} = \frac{1}{\Phi'_w}. \tag{5'}$$

En définitive, *les coordonnées homogènes du point* M *sont*

$$\Phi'_u,\ \Phi'_v,\ \Phi'_w \tag{6}$$

sous réserve que les trois nombres précédents ne soient pas nuls tous les trois, c'est-à-dire que la droite D soit une droite régulière de la famille $\mathcal{F}$.

b) En comparant avec le résultat obtenu au n° **78**, 4°, on constate que le point caractéristique d'une droite régulière D de la famille $\mathcal{F}$ est caractérisé par le fait que c'est le seul point de D par lequel passent 2 droites de la famille $\mathcal{F}$ confondues avec D.

2° **Équation ponctuelle de l'enveloppe.** — L'enveloppe Γ est engendrée ponctuellement par le point M de coordonnées (5) (5'), u, v, w étant liés par (2); l'équation implicite de Γ est donc obtenue en éliminant u, v, w (qui sont homogènes) entre les équations (2), (5), (5').

Mais la relation (2) équivaut à la relation

$$u\Phi'_u + v\Phi'_v + w\Phi'_w = 0, \tag{7}$$

et par suite (2) (5), (5') $\Longrightarrow$ (1)

Inversement (1) (5), (5') $\Longrightarrow$ (2).

On pourra donc aussi éliminer u, v, w (qui sont homogènes) entre les relations (1), (5), (5').

3° Méthode usuelle. — **Un point** $M(x, y)$ du plan appartenant à l'enveloppe Γ **fait partie de l'ensemble L des points où passent deux droites confondues de la famille** $\mathcal{F}$.

Une droite passant par M a pour équation

$$Y - y = m(X - x);$$

l'équation aux coefficients directeurs des droites D issues de M est

$$\Phi(m, \quad -1, \quad y - mx) = 0. \tag{8}$$

En écrivant que l'équation (8) *a une racine multiple, m étant l'inconnue, on forme en général l'équation ponctuelle de l'enveloppe* Γ *des droites* D.

Si la famille $\mathcal{F}$ comporte une droite singulière, l'ensemble L comprend tous les points de cette droite singulière.

EXEMPLE. — Lorsqu'on peut exprimer directement une relation qui lie u, v, w, coordonnées tangentielles de la droite D, pour que celle-ci satisfasse à une propriété imposée, on a immédiatement l'équation tangentielle de l'enveloppe Γ de ces droites. On obtient ensuite l'équation ponctuelle par l'un des procédés indiqués ci-dessus.

Soit, par exemple, à chercher l'enveloppe Γ des cordes d'une parabole $\mathcal{L}$ vues du foyer sous un angle droit.

Prenons le foyer de $\mathcal{L}$ pour origine, soit O; l'équation de $\mathcal{L}$ est

$$y^2 - 2px - p^2 = 0.$$

La droite $D(u, v, w)$ coupe $\mathcal{L}$ en M et M', et le faisceau OM, OM' a pour équation

$$y^2 + 2px\frac{ux + vy}{w} - p^2\left(\frac{ux + vy}{w}\right)^2 = 0.$$

$$\widehat{MOM'} = \frac{\pi}{2} \iff p^2(u^2 + v^2) - 2puw - w^2 = 0 \tag{9}$$

L'équation (9) est l'équation tangentielle de Γ; Γ est une conique ayant un foyer en O.

L'équation aux coefficients directeurs des tangentes issues du point (x, y) est

$$m^2(p^2 + 2px - x^2) + 2y(x - p)m + p^2 - y^2 = 0.$$

En exprimant que cette équation en m admet une racine double, on obtient l'équation ponctuelle de Γ : $2(x^2 + y^2) - (x + p)^2 = 0$,

Γ est l'ellipse d'excentricité $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dont la directrice associée au foyer O a pour équation

$$x + p = 0.$$

87. ***Application de la dualité aux courbes planes.*** — Ce paragraphe ne s'adresse qu'aux lecteurs qui ont étudié, au tome III, la dualité dans les espaces projectifs (n°s 93 à 97) et la transformation par polaires réciproques (n° 229).

Nous partons du plan affine réel $\mathcal{E}$; nous désignons par $\mathcal{P}$ la complétion projective de $\mathcal{E}$ et par $\mathcal{P}^*$ le plan projectif dual, considéré comme l'ensemble des droites de $\mathcal{P}$ (III, 93, 2°). Nous rapportons $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^*$ à deux repères duaux, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$, déduits d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ de $\mathcal{E}$.

Nous appelons *élément de contact* un élément $\{ M, T \}$ de $\mathfrak{L} \times \mathfrak{L}^*$ tel que le point M est sur la droite T; l'ensemble des éléments de contact est désigné par F.

1° **Introduction.** — L'étude des lieux de points et des enveloppes de droites nous a appris que (moyennant des conditions de régularité que nous supposerons remplies) la donnée d'une courbe implique celle de deux ensembles :

a) la partie Γ_p de $\mathfrak{L}$ formée par les points de la courbe,

b) la partie Γ_d de $\mathfrak{L}^*$ formée par les tangentes à la courbe.

La courbe peut donc être considérée comme la partie, Γ, de F qui est constituée par les éléments de contact $\{ M, T \}$ tels que T est la tangente en M et M le point caractéristique de la droite T.

La donnée de l'un des ensembles Γ_p ou Γ_d entraîne la possibilité de déterminer l'autre, par application des résultats suivants (les coordonnées, qui sont homogènes, s'entendent : ponctuelles pour un point de $\mathfrak{L}$, tangentielles pour une droite de $\mathfrak{L}^*$; la notation est légèrement modifiée dans la colonne de droite, dans laquelle on a utilisé des lettres minuscules) :

Lorsque le point M	Lorsque la droite m
de coordonnées homogènes : $A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda)$	
engendre Γ_p, la tangente en M, T, qui contient M et le point M'	engendre γ_d, le point caractéristique de m, t, situé sur m et sur la droite m'
de coordonnées homogènes : $A'(\lambda), B'(\lambda), C'(\lambda)$	
engendre Γ_d.	engendre γ_p.

2° **Étude d'une transformation par polaires réciproques.** — L'analogie des deux calculs précédents nous invite à considérer la bijection, f, de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{L}^*$ qui, au point M de coordonnées (a, b, c) associe la droite $m = f(M)$ de coordonnées (a, b, c).

Il s'agit d'une corrélation (III, 96), qui dépend du choix de $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Lorsque le point $M(a, b, c)$ décrit la droite $D(ux + vy + ht = 0)$, ce qui s'écrit

$$ua + vb + hc = 0$$

la droite $f(M)$ $(ax + by + ct = 0)$ pivote autour du point $f^{-1}(D)$ (u, v, h). On peut d'ailleurs considérer f comme la restriction à $\mathfrak{L}$ de la corrélation polaire (III, 229, 1°) qui, au point générique du complexifié de $\mathfrak{L}$, associe sa polaire par rapport à la conique propre $\mathfrak{K}$, dont une équation est :

$$X^2 + Y^2 + T^2 = 0,$$

quand on rapporte le complexifié au repère $\mathfrak{R}$.

Si $\mathfrak{E}$ est euclidien et si $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est orthonormé, $\mathfrak{K}$ est le cercle imaginaire de centre O dont le carré du rayon est -1, et si H est la projection orthogonale de O sur la droite m (fig. 98),

$$\overline{OH} \cdot \overline{OM} = -1.$$

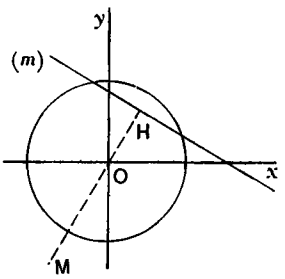


FIG. 98.

Revenant au 1°, nous constatons que les courbes Γ et γ, respectivement étudiées dans la colonne de gauche et dans celle de droite, se correspondent de la façon suivante :

$$m = f(M); \quad \text{d'où} \quad \gamma_d = f(\Gamma_p) \iff \Gamma_p = f^{-1}(\gamma_d)$$
$$t = f^{-1}(T); \quad \text{d'où} \quad \gamma_p = f^{-1}(\Gamma_d) \iff \Gamma_d = f(\gamma_p).$$

Désignons par $\mathfrak{C}$ la restriction à F de la transformation par polaires réciproques de conlque directrice $\mathcal{K}$, c'est-à-dire l'applicatlon involutive de F sur F déterminée par

$$\{ M, T \} \xrightarrow{\mathfrak{C}} \{ f^{-1}(T), f(M) \}.$$

Nous avons $\gamma = \mathfrak{C}(\Gamma)$ et $\Gamma = \mathfrak{C}(\gamma)$, ce que nous traduisons en disant que *chacune des « courbes » γ et Γ (comprise au sens d'ensemble d'éléments de contact) est l'homologue de l'autre dans la transformation par polaires réciproques $\mathfrak{C}$.*

REMARQUE. — La conique $\mathcal{K}$, qui est dite conique directrice de la transformation $\mathfrak{C}$ a été déduite du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{E}$. En fait toute ellipse imaginaire du plan affine réel $\mathcal{E}$ (III, 243, 3°) peut jouer le rôle de $\mathcal{K}$; en effet, une telle ellipse étant donnée, à partir d'un repère réel dans lequel elle a pour équation non homogène $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + 1 = 0$, on détermine un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ réel dans lequel elle a pour équation homogène

$$X^2 + Y^2 + T^2 = 0.$$

L'étude précédente s'étend à toute conique propre de $\mathcal{E}$; nous allons le montrer par voie géométrique (nous pourrions aussi faire une étude analytique).

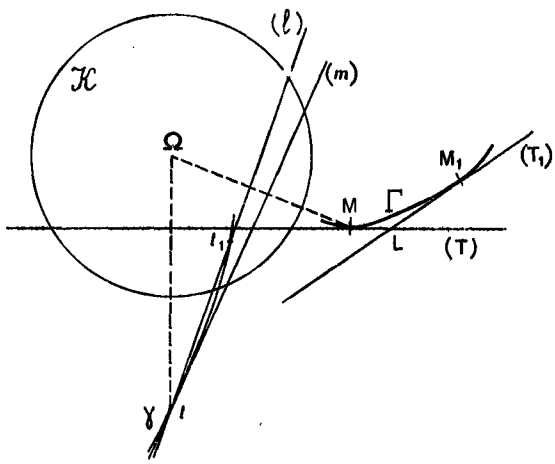


FIG. 99.

3° **Étude géométrique de la transformation d'une courbe par polaires réciproques.** — Nous désignons ici par f et par $\mathfrak{C}$ la corrélation polaire et la transformation par polaires réciproques dont la conique directrice est une conique donnée, $\mathcal{K}$, du plan projectif $\mathfrak{P}$.

Donnons-nous une courbe de $\mathcal{E}$, au sens du 1°, c'est-à-dire un ensemble Γ d'éléments de contact $\{ M, T \}$, auxquels sont associées la partie Γ_p de $\mathfrak{P}$ et la partie Γ_d de $\mathfrak{P}^*$.

Γ_p est transformé par f en un ensemble de droites, γ_d; Γ_d est transformé par f^{-1} en un ensemble de points, γ_p. Nous allons démontrer que γ_d est l'ensemble des tangentes à γ_p.

T et T_1 désignent une droite fixe et la droite générique de Γ_d; $t = f^{-1}(T)$ et $t_1 = f^{-1}(T_1)$ sont donc un point fixe et le point générique de γ_p.

L désigne le point commun à T et T_1; $l = f(L)$ est donc la droite joignant t et t_1.

La démonstration comporte trois parties; on démontre successivement que

I. quand t_1 tend vers t, T_1 tend vers T

II. quand T_1 tend vers T, L tend vers M (point caractéristique de T)

III. quand L tend vers M, l tend vers $m = f(M)$.

Nous nous limiterons au cas où Γ_p n'a aucun point à l'infini et Γ_d n'a aucune droite qui passe par le centre Ω de $\mathcal{K}$ (qui peut, lui-même, être à l'infini).

Dans ces conditions, la proposition II est justifiée par l'étude faite au n° 64.

Montrons que la restriction à $\mathcal{E}$ de l'application f est continue, ce qui justifie les propositions I et III.

Si $\mathcal{K}$ est une

conique à centre	parabole
il existe un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel $\mathcal{K}$ admet pour équation	
$AX^2 + BY^2 + T^2 = 0 \quad (AB \neq 0)$	$AY^2 + 2XT = 0$

La restriction de f à $\mathcal{E}$ s'écrit

$(x, y, 1) \xrightarrow{f} (u = Ax, v = By, h = 1)$	$(x, y, 1) \xrightarrow{f} (u = 1, v = Ay, h = x)$

La continuité de f, au sens d'une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ (cf. n° 184, 2°) résulte de ces formules.

La figure 99 a été faite en nous plaçant dans un plan euclidien, dans le cas où la conique $\mathcal{K}$ est un cercle.

4° **Compléments.** — La dualité permet d'expliquer le parallélisme des résultats obtenus dans l'étude des courbes et dans celle des enveloppes. Rappelons quelques-uns de ces résultats :

a) Aux notations du 1°, ajoutons la suivante.

M'' désigne le point de Γ_p	m'' désigne la droite de γ_d
de coordonnées homogènes : $A''(\lambda)$, $B''(\lambda)$, $C''(\lambda)$	

Cela posé :

M est point stationnaire de Γ_p si	m est droite stationnaire de γ_d si
$\dfrac{A'(\lambda)}{A(\lambda)} = \dfrac{B'(\lambda)}{B(\lambda)} = \dfrac{C'(\lambda)}{C(\lambda)}$	
Si M, M', M'' sont alignés	Si m, m', m'' sont concourantes
c'est-à-dire si	$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0,$

la tangente en M coupe Γ_p en trois points confondus en M; et si M n'est pas stationnaire, M est un point d'inflexion.

du point de contact de m on mène à γ_d trois tangentes confondues avec m; et si m n'est pas stationnaire, m est une tangente de rebroussement de 1re espèce.

b) Dans les cas d'ensembles définis par des équations implicites, nous avons :

Courbe Γ $f(x, y, z) = 0$.

La tangente (T) au point M de Γ a pour équation

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0$$

M est singulier si

$$f'_x = 0 \quad f'_y = 0 \quad f'_z = 0.$$

On trouve l'équation tangentielle de Γ en éliminant x, y, z, entre

$$\begin{cases} ux + vy + wz = 0 \\ \dfrac{f'_x}{u} = \dfrac{f'_y}{v} = \dfrac{f'_z}{w} \end{cases}$$

Droite $M_0(a_0, b_0, c_0)$ $M_1(a_1, b_1, c_1)$:

Les points communs à L et à la droite (M_0M_1) sont donnés par

$$f(a_0 + \lambda a_1, \quad b_0 + \lambda b_1, \quad c_0 + \lambda c_1) = 0.$$

Enveloppe γ $f(u, v, w) = 0$.

Le point de contact t de la tangente (m) à γ a pour équation tangentielle

$$Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w = 0$$

(m) est singulière si

$$f'_u = 0 \quad f'_v = 0 \quad f'_w = 0.$$

On trouve l'équation ponctuelle de γ en éliminant u, v, w entre

$$\begin{cases} ux + vy + wz = 0 \\ \dfrac{f'_u}{x} = \dfrac{f'_v}{y} = \dfrac{f'_w}{z}. \end{cases}$$

Point commun aux droites (m_0) (a_0, b_0, c_0) et (m_1) (a_1, b_1, c_1) :

Les tangentes communes à γ et au point $[(m_0)\ (m_1)]$ sont données par

$$f(a_0 + \lambda a_1, \quad b_0 + \lambda b_1, \quad c_0 + \lambda c_1) = 0.$$

EXERCICES

1. — Enveloppe de la famille des droites

a) $$x \operatorname{ch}^2\lambda + y \operatorname{sh}^2\lambda - a \operatorname{ch}^2 2\lambda = 0$$

b) $$x \operatorname{ch}^2\lambda + y \operatorname{sh}^2\lambda - a \operatorname{ch} 2\lambda = 0$$

c) $$(1 - 3\lambda^2)x + \lambda(3 - \lambda^2)y - a = 0$$

d) $$x \cos\lambda + y \sin\lambda - a\sqrt{\sin 2\lambda} = 0$$

e) $$x \cos\lambda + y \sin\lambda - a\left[1 + \cos\lambda \operatorname{Log} \operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\right] = 0.$$

2. — Enveloppe des cordes d'une ellipse : *a*) vues du centre sous un angle droit; *b*) vues d'un foyer sous un angle donné.

3. — Enveloppe des polaires d'un point fixe par rapport aux cercles bitangents à une parabole.

4. — Enveloppe des cordes d'une parabole qui déterminent avec la courbe des domaines d'aire donnée.

5. — Enveloppe du second côté d'un angle de mesure constante dont le sommet décrit une droite fixe et dont le premier côté passe par un point fixe.

6. — Enveloppe des cordes d'un cercle vues sous un angle droit d'un point donné, extérieur au plan du cercle.

7. — Enveloppe de l'axe radical d'un cercle donné et d'un cercle de rayon donné qui est en outre assujetti à passer par un point donné.

8. — Enveloppe de la polaire d'un point fixe par rapport à un cercle de rayon constant dont le centre décrit un cercle fixe.

9. — Enveloppe des cordes de la courbe.

a) $x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$ *b)* $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ *c)* $r(\cos\theta + \cos 3\theta) - a = 0$

vues du point O sous un angle droit (repère orthonormé).

10. — Enveloppe de la médiatrice du segment M'M" sachant que les points M' et M" décrivent la parabole P et que la droite M'M" passe par un point fixe de l'axe de P.

11. — Antipodaire, par rapport à O, de la courbe d'équation polaire $r^n = a^n \cos n\theta$.

Cas particuliers : $n = \pm 2, \quad \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{1}{3}$.

12. — Montrer que l'antipodaire d'une parabole par rapport à son foyer F est une cubique (cubique de Tchirnhausen). Former l'équation tangentielle de cette cubique. Montrer qu'en prenant pour origine son point double on peut la représenter paramétriquement par des formules telles que

$$X = a(3t^2 - 1), \qquad Y = at(3t^2 - 1).$$

Toute sécante menée par F rencontre la cubique en A, B, C. Démontrer que les tangentes en A, B, C à la cubique forment un triangle équilatéral. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle quand la sécante tourne autour de F.

13. — Dans un repère orthonormé Ox, Oy, former l'équation de la droite D symétrique de Ox par rapport à la droite Δ d'équation $ux + vy + w = 0$. Déduire de là l'équation tangentielle générale des courbes planes pour lesquelles l'axe Ox fait partie de la courbe orthoptique.

14. — Soit Γ l'enveloppe de la droite D_λ

$$u(\lambda)x + v(\lambda)y + w(\lambda) = 0,$$

les fonctions u, v, w étant indéfiniment dérivables.

En prenant pour axes la droite D_{λ_0} et la première des droites D'_{λ_0}, D''_{λ_0} ... qui soit sécante à D_{λ_0}, étudier la forme de Γ au voisinage du point M_0 correspondant à la valeur λ_0 du paramètre.

15. — Démontrer que toute courbe d'équation tangentielle $g(u, v, w) = 0$, g étant un polynôme homogène, de degré 1 en u, en v, ou en w, est unicursale.

16. — Trouver les enveloppes des droites qui portent les côtés d'un rectangle dont les sommets appartiennent respectivement aux côtés (indéfinis) d'un rectangle donné. Démontrer que chacune de ces courbes admet trois points de rebroussement, dont deux imaginaires. Étudier le cas particulier où le rectangle donné est un carré.

17. — On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy et un point A. Trouver l'enveloppe d'une droite Δ coupant Ox en P et Oy en Q et telle que AP = PQ.

18. — On donne la courbe C d'équation $y^3 - 3ax^2 = 0$. Enveloppe E des droites qui coupent C en trois points tels que l'un est le milieu du segment défini par les deux autres. Comparer E et la transformée de C par polaires réciproques par rapport à $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

19. — Enveloppe des droites dont la somme (resp. différence) des carrés des distances à deux points fixes est constante.

20. — Enveloppe du second côté d'un angle droit dont le premier côté enveloppe une ellipse C et dont le sommet décrit un cercle concentrique à C.

21. — Enveloppe des côtés d'un carré de grandeur donnée qui varie de façon que chacune de ses diagonales passe par un point fixe.

22. — On donne trois droites D_1, D_2, D_3. Enveloppe des droites qui les coupent en trois points M_1, M_2, M_3 tels que le rapport $\dfrac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_1M_3}}$ soit constant.

23. — Enveloppe des asymptotes des courbes (C_λ) $(x + \lambda y)y^2 + a\lambda x^2 + a^3 = 0$.

24. — Un point M, qui décrit la courbe donnée C, se projette en H sur la droite donnée D. P est le symétrique de H par rapport à la tangente en M à C. Déterminer la normale en P au lieu de P.

25. — Enveloppe des cercles qui ont pour diamètres

a) les cordes d'une conique qui ont une direction donnée

b) les cordes d'une conique qui passent par un foyer (cas de la parabole)

c) les segments découpés sur deux droites parallèles fixes par une droite qui pivote autour d'un point fixe

d) les segments découpés sur deux droites orthogonales fixes par une droite qui pivote autour d'un point fixe.

26. — Enveloppe d'un cercle C orthogonal à un cercle fixe Γ et centré sur un cercle fixe Γ'.

27. — Enveloppe d'un cercle C orthogonal à un cercle fixe Γ et coupant sous un angle donné un diamètre donné de Γ'. Enveloppe de la polaire d'un point fixe par rapport à C.

28. — Enveloppe d'un cercle C centré sur une conique Γ' et orthogonal à un cercle bitangent à Γ. Cas où Γ' est une parabole.

29. — M'M'' est une corde du limaçon de Pascal $r = a\cos\theta + b$ vue de O sous un angle donné. Enveloppe du cercle circonscrit au triangle OM'M''.

30. — Construire la courbe (Γ) $2r\cos^2\theta = a$ et l'enveloppe du cercle de diamètre OM, quand M décrit (Γ).

31. — Enveloppe des hyperboles qui ont un sommet et une asymptote donnés. Retrouver le résultat en utilisant une construction géométrique des points caractéristiques de l'une de ces hyperboles.

32. — Enveloppe d'une parabole de directrice donnée, dont le foyer décrit un cercle donné.

33. — Enveloppe d'une conique C dont on donne un foyer Γ et la longueur $2a$ du grand axe, sachant que le deuxième foyer décrit une droite donnée.

34. — Enveloppe des courbes C_λ représentées par les équations

a) $\begin{cases} x = \cos u + \lambda\cos 2u \\ y = \sin u + \lambda\sin 2u \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x = u^2 + \lambda^2 \\ y = u^3 + \lambda^3 \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} x = a\cos\lambda\cos^3 u \\ y = a\sin\lambda\sin^3 u. \end{cases}$

35. — On considère la famille C_λ des courbes déterminées paramétriquement par les équations :

$$x = \frac{3u - u^3}{u - \lambda} \qquad y = \frac{1 - 3u^2}{u - \lambda}.$$

Déterminer, lorsque λ varie, le lieu du point double, le lieu du point d'inflexion réel I, l'enveloppe de la tangente en I et l'enveloppe de l'asymptote réelle.

36. — Former l'équation tangentielle des paraboles Γ tangentes aux axes rectangulaires Ox, Oy, et admettant un foyer donné F, de coordonnées polaires θ, r. Enveloppe de Γ quand F décrit *a*) le cercle (O, R); *b*) une droite; *c*) la cardioïde $r = a(1 + \cos\theta)$; *d*) la lemniscate $r^2 = a^2\sin 2\theta$.

37. — Trouver la développée d'une cissoïde droite, d'une strophoïde droite, d'une lemniscate de Bernoulli, d'une spirale d'Archimède, de la courbe

a) $x = a(\cos^2 u + \operatorname{Log}\sin u)$, $\quad y = a\sin u\cos u$;

b) $x = a\cos u\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{u}{2}$, $\quad y = a\left(\operatorname{cotg} u + \sin u\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right)$.

38. — Former l'équation ponctuelle de la courbe qui a pour équation tangentielle

$$u^3 + v^3 + w^3 = 0, \qquad \sqrt{u} + \sqrt{v} = \sqrt{w}, \qquad u^4 + v^4 = w^4, \qquad \frac{A}{u^2} + \frac{B}{v^2} + \frac{C}{w^2} = 0.$$

39. — Indiquer suivant la position du point A (a, b) le nombre et le signe des racines réelles de chacune des équations suivantes

$$t^3(a-1) - bt^2 + at - b = 0; \quad 3t^4 + 8at^3 - 12bt^2 + 4b = 0;$$

$$\sin^3 t - a\sin^2 t + b\sin t - 1 = 0 \qquad \text{avec} \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

40. — Les tangentes à la courbe $r = \dfrac{a}{\operatorname{ch}\theta}$ en des points alignés avec le pôle sont tangentes à une même courbe algébrique.

Même question pour la courbe $r = a\dfrac{\sin\theta}{\theta^2 - 1}$.

41*. — Les asymptotes de la courbe $\dfrac{a}{r} = \theta\cos\theta - \sin\theta$ sont tangentes à une même courbe algébrique.

EXERCICES SUR LES COURBES CYCLOÏDALES. — (Repère orthonormé.)

42. — Construire les courbes représentées par les équations

$$\begin{cases} x = 3\sin 4u + 4\sin 3u \\ y = 3\cos 4u - 4\cos 3u \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3\cos 5t - 5\sin 3t \\ y = 3\sin 5t + 5\cos 3t. \end{cases}$$

43. — Reconnaître la courbe représentée par

$$\begin{cases} x = a\sin u \\ y = a(u + \cos u). \end{cases}$$

44. — On reprend les notations du n° 84.

a) Mener les tangentes à l'hypocycloïde Γ à trois rebroussements par un point donné A du cercle Σ (on amènera en A le point primaire, puis le point secondaire).

b) Étudier la disposition relative des tangentes ainsi obtenues et de leurs points de contact; en déduire qu'une tangente variable à Γ recoupe Γ en deux points dont la distance est constante.

c) Trouver le lieu des points d'où l'on mène à Γ deux tangentes rectangulaires.

45. — O et M sont respectivement un point fixe et un point variable d'un cercle Σ; enveloppe de la droite MΔ symétrique en direction de la droite MO par rapport à une direction donnée du plan de Σ.

46. — Étudier les courbes représentées par les équations

$$\begin{cases} x = a\sin 2u\cos^2 u \\ y = a\cos 2u\sin^2 u \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a\dfrac{u^6 + 6u^2 - 3}{(u^4+1)^2} \\ y = a\dfrac{8u^4}{(u^4+1)^4}. \end{cases}$$

Pour chacune de ces courbes on cherchera l'équation tangentielle, la classe, la courbe orthoptique.

47. — Enveloppe d'un diamètre d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite ou sur un cercle.

48. — Enveloppe des droites qui coupent une cycloïde sous un angle donné.

49. — Enveloppe de la famille des droites

a) $ux + vy = \dfrac{u^3 + v^4}{u^4 + v^2}$ *b*) $x\cos\lambda + y\sin\lambda - a\cos^3\lambda = 0.$

50. — Des rayons lumineux parallèles à une direction donnée se réfléchissent sur un cercle. Enveloppe des rayons réfléchis.

51. — Par un point M d'une ellipse C on mène la droite Δ(M) symétrique de la tangente en M par rapport à une parallèle à un axe de C. Construire l'enveloppe E de Δ(M). Montrer géométriquement que E est une affine d'astroïde.

52*. — La symétrique d'une tangente de rebroussement d'une hypocycloïde à trois rebroussements par rapport à une tangente variable enveloppe une astroïde.

53*. — On considère la famille des cycloïdes C_λ déduites d'une cycloïde fixe par translations parallèles à la base. *a*) Lieu des points de contact des tangentes (resp. des pieds des normales) aux C_λ qui passent par un point donné. *b*) Enveloppe des tangentes aux C_λ aux points où ces courbes coupent une droite donnée (hypocycloïde à trois rebroussements).

54. — Un point M décrit un cercle fixe C, tangent en O à Oy. M se projette sur les axes de coordonnées en P et Q. Enveloppe de la droite PQ.

55. — Enveloppe de la tangente de rebroussement d'une cardioïde tangente en O à Ox, dont le point de rebroussement décrit un cercle lui-même tangent en O à Ox.

56. — Un point M décrit la cardioïde C d'équation $r = a(1 + \cos\theta)$. Enveloppe de la symétrique de la droite OM par rapport à la tangente en M à C.

57. — On considère les courbes

(C_λ) $\quad x = \cos^3 u + \lambda \sin u, \qquad y = \sin^3 u + \lambda \cos u.$

Lieu, quand λ varie, des points de rebroussement des C_λ et enveloppe des tangentes en ces points aux C_λ.

58*. — Enveloppe des axes des paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle rectangle isocèle donné.

59. — Par un point M de la strophoïde (C) $x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$ on mène la droite $\Delta(M)$ symétrique de la tangente en M par rapport à une parallèle à Ox. Trouver l'enveloppe de $\Delta(M)$.

60. — Soit C_λ la courbe enveloppe de la droite Δ d'équation

$$x \sin\theta + y \cos\theta + 2a \sin\theta \cos(2\theta + \lambda) = 0.$$

Trouver la courbe orthoptique γ_λ de C_λ. Étudier les points communs à Δ et à C_λ. Identifier C_λ. Démontrer que toutes les courbes C_λ sont égales, passent par deux points fixes A, A' et sont tangentes à la droite AA'. Quel est le lieu des points de rebroussement des courbes C_λ?

CHAPITRE VIII

PLANS TANGENTS AUX SURFACES

I. NOTION DE SURFACE; PLAN TANGENT

88. ***Notion de surface.*** — Nous nous plaçons dans un espace affine $\mathcal{E}_3$, attaché à un espace vectoriel réel $\vec{\mathcal{E}}_3$, de dimension 3. Nous munissons $\vec{\mathcal{E}}_3$ et $\mathcal{E}_3$ de la distance associée à une norme arbitrairement choisie de $\vec{\mathcal{E}}_3$ et nous rapportons $\mathcal{E}_3$ à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1° **Nappes paramétrées, nappes géométriques.** — De la même façon qu'au n° 287, 6°, du tome II nous avons déduit la notion de *courbe* de celle d'*arc paramétré*, nous allons déduire la notion de *surface* de celle de *nappe paramétrée*. Posons :

DÉFINITION. — **On appelle nappe paramétrée de classe C^k, $(k \geqslant 0)$, et on note $(\mathcal{D}, \vec{F})$ toute application de classe C^k, $(u, v) \longrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{F}(u, v)$, d'un champ $\mathcal{D} \subset R^2$ dans l'espace métrique $\mathcal{E}_3$.**

Pour éviter toute difficulté en ce qui concerne la différentiabiiité, nous supposerons dans l'étude théorique que $\mathcal{D}$ est une partie ouverte et connexe (nous dirons un *domaine*) dc R^2; dans la pratique il s'agira du domaine intérieur à une courbe simple continue fermée. Nous nous intéresserons au support $\Sigma = \vec{F}(\mathcal{D})$ de $\vec{F}$.

DÉFINITION. — **On dit qu'un point M de $\mathcal{E}_3$ est point simple de la nappe paramétrée $(\mathcal{D}, \vec{F})$ s'il existe un et un seul point de $\mathcal{D}$ dont l'image par $\vec{F}$ est M.**

En procédant comme au n° 287, 6° du tome II, cette définition nous conduit à poser la définition suivante, dont la vérification est laissée au soin du lecteur.

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Dans l'ensemble des nappes paramétrées de classe C^k de $\mathcal{E}_3$, la relation binaire $\mathcal{R}$ « $(\mathcal{D}, \vec{F})\ \mathcal{R}\ (\Delta, \vec{\Phi})$ signifie qu'il existe un C^k-difféomorphisme $\vec{\varphi}$ de Δ sur $\mathcal{D}$ vérifiant $\vec{\Phi} = \vec{F} \circ \vec{\varphi}$ » est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence, $\mathcal{G}$, est dite nappe géométrique de classe C^k.**

Chacune des nappes paramétrées qui constituent $\mathcal{S}$ en est une *représentation paramétrique admissible*; leur support commun est dit support de la nappe géométrique $\mathcal{E}$.

On montre en analyse (cf. II, 165, 2°), que la bijection $\vec{\varphi}$ de classe C^k de Δ sur $\mathcal{D}$ déterminé par

$$(1) \qquad (\lambda, \mu) \longrightarrow (u, v), \quad \text{avec} \quad u = \varphi(\lambda, \mu) \quad \text{et,} \quad v = \psi(\lambda, \mu),$$

est un difféomorphisme de ciasse C^k si et seulement si :

$$(2) \qquad (\forall (\lambda, \mu) \in \Delta) \qquad \frac{D(u, v)}{D(\lambda, \mu)} = \begin{vmatrix} \varphi'_\lambda(\lambda, \mu) & \varphi'_\mu(\lambda, \mu) \\ \psi'_\lambda(u, v) & \psi'_\mu(\lambda, \mu) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous en déduirons plus tard (164) la notion d'orientation d'une nappe géométrique.

DÉFINITION. — **La nappe paramétrée $(\mathcal{D}, \vec{F})$ est dite simple quand l'application $\vec{F}$ est injective.**

Cette notion est invariante dans un changement de représentation paramétrique admissible, d'où la notion de *nappe géométrique simple*.

2° DÉFINITION. **On appelle surface toute partie de $\mathcal{E}_3$ qui peut-être considérée comme le support d'une nappe géométrique simple, de classe C^1.**

Une telle surface Σ sera définie par un paramétrage admissible

$$(3) \qquad \overrightarrow{OM} = \vec{F}(u, v) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} = f(u, v)\,\vec{i} + g(u, v)\,\vec{j} + h(u, v)\,\vec{k},$$

dans lequel (u, v) décrit un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbf{R}^2$.

On suppose donc que les fonctions vectorielles $\vec{F}$, $\vec{F}'_u$, $\vec{F}'_v$ ou encore que les fonctions scalaires f, g, h et leurs dérivées partielles du premier ordre sont continues sur $\mathcal{D}$. On pose :

DÉFINITION. — **Le point M_0 de Σ, correspondant aux paramètres (u_0, v_0) est dit régulier ou singulier selon que le système $(\vec{F}'_u(u_0, v_0), \vec{F}'_v(u_0, v_0))$ de vecteurs de $\mathcal{E}_3$ est libre ou lié.**

Cette notion est indépendante du choix du paramétrage admissible car, quand on passe de (3) à

$$(4) \qquad \overrightarrow{OM} = \Phi(\lambda, \mu), \qquad (\lambda, \mu) \in \Delta,$$

grâce aux formules (1), on a, compte tenu de (2),

$$(5) \qquad \begin{bmatrix} \vec{\Phi}'_\lambda \\ \vec{\Phi}'_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi'_\lambda & \psi'_\lambda \\ \varphi'_\mu & \psi'_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{F}'_u \\ \vec{F}'_v \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg}(\vec{\Phi}'_\lambda, \vec{\Phi}'_\mu) = \operatorname{rg}(\vec{F}'_u, \vec{F}'_v).$$

Courbes coordonnées. — La partie C_{u_0} de Σ qui est l'ensemble des points de paramètres (u_0, v) où u_0 est fixé est une courbe, sur laquelle le « paramètre de circulation » est v; cette courbe contient $M_0\ (u_0, v_0)$ et admet, en général, une tangente en M_0 dirigée par le vecteur $\vec{F}'_v(u_0, v_0)$; de même le vecteur $\vec{F}'_u(u_0, v_0)$ dirige la tangente en M_0 à la courbe Γ_{v_0} représentée par $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u, v_0)$; on dit que C_{v_0} et Γ_{u_0} sont les *courbes coordonnées* de M_0, sur Σ.

89. *Plan tangent en un point.* — 1° Existence du plan tangent. Soit $M_0(u_0, v_0)$ un point régulier de la surface Σ définie au n° 88, et considérons les courbes tracées sur Σ, passant par M_0.

D'après l'étude de la dérivation d'une fonction composée, on obtient une courbe dérivable Γ tracée sur Σ en se donnant

$$u = \varphi(t), \qquad v = \psi(t),$$

les fonctions φ et ψ étant dérivables sur un segment $\mathcal{C}$ de R; Γ passe par M_0 si dans $\mathcal{C}$, il existe t_0 tel que $u_0 = \varphi(t_0)$, $v_0 = \psi(t_0)$.

Le vecteur-espace du point générique M de Γ est

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}[\varphi(t),\ \psi(t)]$$

et

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{F}'_u(\varphi, \psi).\varphi'(t) + \vec{F}'_v(\varphi, \psi).\ \psi'(t).$$

Au point M_0, $\dfrac{d\vec{M}}{dt}$, vecteur porté par la tangente en M à Γ devient,

$$\vec{F}'_u(u_0, v_0).\varphi'(t_0) + \vec{F}'_v(u_0, v_0).\psi'(t_0). \tag{1}$$

Lorsqu'on fait varier φ et ψ, le vecteur $\overrightarrow{M_0T_0}$ d'origine M_0, équipollent à (1), reste dans le plan des vecteurs

$$\overrightarrow{M_0U_0} = \vec{F}'_u(u_0, v_0), \qquad \overrightarrow{M_0V_0} = \vec{F}'_v(u_0, v_0),$$

ces deux vecteurs d'origine M_0 étant, d'après les hypothèses de régularité du point M_0, ni nuls, ni colinéaires; d'autre part la relation (5) du n° 88 montre que ce plan ne dépend pas du choix du paramétrage admissible qui a servi à définir Σ.

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Les tangentes en un point régulier d'une surface Σ à toutes les courbes tracées sur la surface et passant par ce point sont dans un même plan. Ce plan est appelé plan tangent à Σ au point considéré.**

REMARQUE. — On peut trouver α et β pour que le vecteur $\alpha\overrightarrow{M_0U_0} + \beta\overrightarrow{M_0V_0}$ soit porté par une droite $M_0\Delta$ arbitrairement menée par M_0 dans le plan tangent.

En considérant alors la courbe Γ déterminée sur Σ par

$$u = \alpha t + \alpha_1, \qquad v = \beta t + \beta_1,$$

la tangente en M_0 à Γ est $M_0\Delta$.

Toute droite passant par M_0, située dans le plan tangent en M_0, est tangente en M_0 à une courbe tracée sur la surface et passant par M_0.

2° **Équation du plan tangent.** — On écrit l'équation du plan tangent Π à Σ en un point régulier $M(u, v)$ en exprimant que P étant le point générique de Π, $\overrightarrow{MP}$, $\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v}$ sont coplanaires, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} x - f(u,v) & y - g(u,v) & z - h(u,v) \\ f'_u & g'_u & h'_u \\ f'_v & g'_v & h'_v \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas où l'espace $\mathcal{E}_3$ est euclidien et le repère orthonormé, le vecteur $\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v}$ est perpendiculaire au plan tangent en M à Σ; ce vecteur dirige la normale en M à Σ.

3° **Exemples.** — *a) Surface cylindrique.* — La surface cylindrique Σ est engendrée par une droite G qui reste parallèle à un vecteur fixe $\vec{l}$ et qui s'appuie sur une courbe $\mathcal{D}$ (directrice), donnée par une représentation propre. Soit $P(u)$ le point générique de $\mathcal{D}$; le point générique M de Σ est donné (fig. 100) par

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \rho\vec{l} = \vec{F}(u, \rho).$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u} = \frac{d\overrightarrow{P}}{du}; \qquad \frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial \rho} = \vec{l}.$$

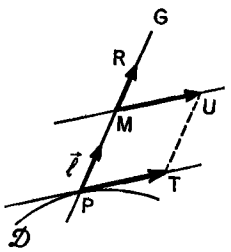


FIG. 100.

La représentation de Σ est propre. Le point M est régulier si la tangente à $\mathcal{D}$ en P est distincte de la génératrice G issue de P; le plan tangent en M est alors défini par les vecteurs

$$\overrightarrow{MU} = \frac{d\overrightarrow{P}}{du}, \qquad \overrightarrow{MR} = \vec{l}.$$

Le plan tangent est le même, quel que soit M *sur* G.

b) Surface conique. — La surface conique Σ est engendrée par une droite G qui passe par un point fixe S et qui s'appuie sur une courbe $\mathcal{D}$ (directrice) donnée par une représentation propre. Soit $P(u)$ le point générique de $\mathcal{D}$; le point générique M de Σ est donné (fig. 101) par

$$\overrightarrow{SM} = \rho\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{F}(u, \rho).$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u} = \rho\frac{d\overrightarrow{P}}{du}; \qquad \frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial\rho} = \overrightarrow{SP}.$$

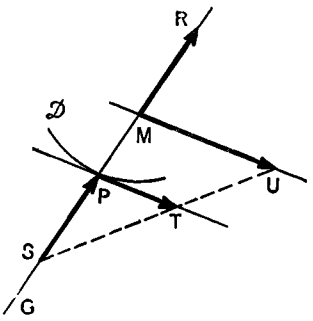


FIG. 101.

La représentation de Σ est propre. Le point M est régulier si $\rho \neq 0$, et si la tangente à $\mathcal{D}$ en P est distincte de la génératrice SP; le plan tangent en M est alors défini par les vecteurs

$$\overrightarrow{MU} = \rho\frac{d\overrightarrow{P}}{du}; \qquad \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{SP};$$

le plan tangent est le même, quel que soit M (*distinct de* S) *sur la génératrice* G.

Cônes supplémentaires. — Plaçons-nous en géométrie métrique, et supposons le repère orthonormé.

Soit G' la perpendiculaire menée par S au plan tangent Π à la surface conique Σ le long de la génératrice G; lorsque G engendre Σ, G' engendre une surface conique Σ'. Le plan Π est défini en général par les vecteurs $\overrightarrow{SP}$ et $\frac{d\overrightarrow{P}}{du}$; par suite G' est le support du vecteur

$$\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SP} \wedge \frac{d\overrightarrow{P}}{du}.$$

Le plan tangent Π' à Σ le long de G' est défini de même, en général, par les vecteurs

$$\overrightarrow{SQ} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{Q}}{du} = \overrightarrow{SP} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{P}}{du^2}.$$

Or $\overrightarrow{SQ}$ et $\frac{d\overrightarrow{Q}}{du}$ sont tous deux perpendiculaires à $\overrightarrow{SP}$, c'est donc que G est perpendiculaire en S au plan Π'. Σ peut donc se construire, à partir de Σ', comme Σ' a été construit à partir de Σ. On peut donc énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — *Soit Σ et Σ' deux cônes de sommet* S; *si chaque génératrice du second est perpendiculaire à un plan tangent au premier, chaque génératrice du premier est perpendiculaire à un plan tangent au second. On dit que les cônes Σ et Σ' sont supplémentaires.*

c) Surface de révolution. — Supposons l'espace affine euclidien et le repère orthonormé. On donne un arc simple L dans le plan xOz par une représentation propre $x = f(u), \quad z = h(u)$.

La surface de révolution Σ est engendrée par un cercle Π d'axe Oz, s'appuyant sur L en P. Le point générique de Π a pour coordonnées (fig. 102)

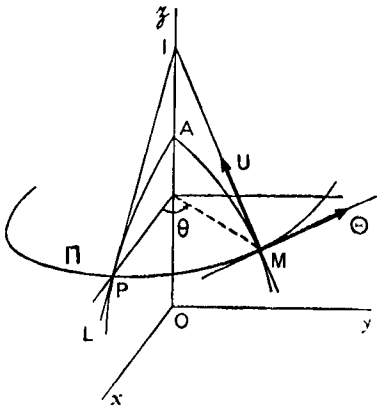


FIG. 102.

$$(1)\qquad \begin{cases} x = f(u)\cos\theta \\ y = f(u)\sin\theta \\ z = h(u). \end{cases}$$

Les formules (1) donnent une représentation propre, $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u, \theta)$ de Σ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}\begin{cases} f'(u)\cos\theta \\ f'(u)\sin\theta \\ h'(u) \end{cases} \qquad \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}\begin{cases} -f(u)\sin\theta \\ f(u)\cos\theta \\ 0 \end{cases}$$

Le point M est régulier, puisque les vecteurs précédents sont orthogonaux, sauf

I) si $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u} = 0$, ce qui arrive si P est stationnaire pour L;

II) si $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = 0$, ce qui arrive si $f(u) = 0$, c'est-à-dire en un point d'intersection de L avec l'axe de révolution.

Le plan tangent en M est défini par les vecteurs

$\overrightarrow{MU} = \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u}$, porté par la tangente en M à la méridienne contenant ce point

$\overrightarrow{M\Theta} = \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}$, porté par la tangente en M au cercle parallèle Π.

Le plan tangent en M *est perpendiculaire au plan méridien de* M.

Le plan tangent en M coupe l'axe Oz au point I, *indépendant de la position de* M *sur* Π; la normale en M étant située dans le plan méridien, elle rencontre l'axe Oz en un point Ω, *indépendant de la position de* M *sur* Π.

REMARQUES. — Soit u_0 une valeur telle que $f(u_0) = 0$; le point A correspondant de Σ est associé à tous les couples (u_0, θ), $\theta \in [0, 2\pi[$.

Si $f'(u_0) \neq 0$, $h'(u_0) \neq 0$, les vecteurs $\left(\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u}\right)_{u_0,\,\theta}$ engendrent en A un cône de révolution, cône des tangentes en A à Σ.

Si $f'(u_0) = 0$, $h'(u_0) \neq 0$, toutes les tangentes en A aux courbes Γ tracées sur Σ coïncident avec Oz.

Si $f'(u_0) \neq 0$, $h'(u_0) = 0$, toutes les tangentes en A aux courbes Γ tracées sur Σ_0 sont orthogonales en A à Oz; il existe alors un plan tangent en A à Σ.

90. *Plan tangent à une surface $z = f(x, y)$.* — Existence et équation du plan tangent. — Soit f une fonction des deux variables réelles x et y, définie, continue, admettant des dérivées partielles continues sur un champ $\mathcal{C}$ du plan xOy.

L'application f de $\mathcal{C}$ dans l'espace géométrique $\mathcal{E}_3$ définie par

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$$

répond aux conditions *a*), *b*), *c*), *d*) du n° 88, les vecteurs

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial x} = \vec{i} + f'_x.\vec{k}, \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} = \vec{j} + f'_y.\vec{k}$$

n'étant ni nuls, ni colinéaires.

Les variables x et y sont ici les variables u et v de l'étude générale.

L'image de $\mathcal{C}$ par f est donc une nappe simple continûment dérivable.

En tout point M de Σ il existe un plan tangent défini par les deux vecteurs précédents et dont l'équation est, X, Y, Z désignant ici les coordonnées du point générique de ce plan,

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = 0$$

ou encore

$$Z - z = (X - x)f'_x + (Y - y)f'_y$$

2° Interprétation géométrique de la différentielle d'une fonction de deux variables. – La fonction f, continûment dérivable sur $\mathcal{C}$, admet (II, 142, 2°) en tout $(x, y) \in \mathcal{C}$ une application différentielle de la forme

$$(dx, dy) \longrightarrow f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy.$$

Soit M' le point de la surface Σ définie au 1° qui a pour abscisse $x + dx$, pour ordonnée $y + dy$. La parallèle à Oz menée par M' perce le plan tangent Π en M, en un point P.

La cote du point P, donnée par l'équation du plan tangent, est

$$f(x, y) + f'_x dx + f'_y dy.$$

L'accroissement de la cote du plan tangent quand on passe du point (x, y) au point $(x + dx, y + dy)$ est ainsi l'image du vecteur (dx, dy) par la différentielle de f au point (x, y).

3° Disposition de la surface par rapport au plan tangent en un point. — Soit M_0 un point fixe de Σ, projeté en $m_0(x_0, y_0)$ sur xOy, M un point quelconque de Σ, projeté en $m(x = x_0 + h, y = y_0 + k)$ sur xOy (fig. 103).

Comparons, dans un voisinage de m_0, la cote $f(x, y)$ de M et la cote du point P, intersection du plan tangent Π en M_0 et de la parallèle à Oz menée par M; cette dernière cote est

$$\zeta = f(x_0, y_0) + (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0).$$

Nous avons donc à étudier la différence

$$\delta = \overline{PM} = f(x, y) - \zeta,$$

ou encore la fonction

$$g(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - (x - x_0) f'_x(x_0, y_0) - (y - y_0) f'_y(x_0, y_0)$$
$$g(x_0, y_0) = 0; \quad g'_x(x_0, y_0) = 0; \quad g'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Nous sommes ainsi ramenés à l'étude faite au tome II, n° 154, 4° : la fonction $g(x, y)$ présente-t-elle un extremum au point m_0?

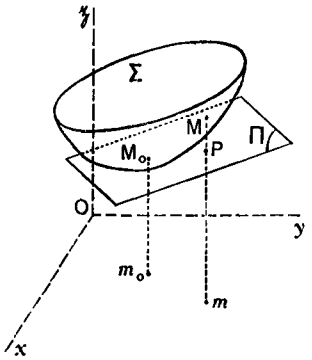


FIG. 103.

Nous poserons, pour simplifier,

$$\begin{cases} r_0 = g''_{x^2}(x_0, y_0) = f''_{x^2}(x_0, y_0), \\ s_0 = g''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0). \\ t_0 = g''_{y^2}(x_0, y_0) = f''_{y^2}(x_0, y_0). \end{cases} \qquad \begin{cases} h = \rho \cos\theta \\ k = \rho \sin\theta \end{cases}$$

$$\psi(\theta) = r_0 \cos^2\theta + 2 s_0 \cos\theta \sin\theta + t_0 \sin^2\theta.$$

a) Si $s_0^2 - r_0 t_0 < 0$, $\psi(\theta)$ a le signe commun de r_0 et de t_0, quel que soit θ; Σ est, au voisinage de M_0, d'un même côté du plan tangent en M_0.

b) Si $s_0^2 - r_0 t_0 > 0$, il existe deux valeurs θ_1 et θ_2 (définies à π près) annulant $\psi(\theta)$; les droites $m_0\alpha_1$ et $m_0\alpha_2$ correspondantes délimitent 4 angles; δ est positif pour les points m situés dans deux angles opposés par le sommet, négatif dans les autres angles; la surface Σ traverse le plan tangent en M_0 (fig. 104).

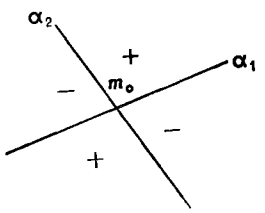


FIG. 104.

Si m est situé sur $m_0\alpha_1$ ou $m_0\alpha_2$, il faudrait pousser plus loin le développement de $g(x, y)$ pour trouver le signe de δ.

c) Si $s_0^2 - r_0 t_0 = 0$, $\psi(\theta)$ s'annule pour une valeur θ_1 (définie à π près); $\psi(\theta)$ a le signe de r_0 et de t_0, sauf si m est situé sur la droite $m_0\alpha'_1$ correspondant à θ_1. Les points de Σ qui ne se projettent pas sur $m_0\alpha_1$ sont, au voisinage de m_0, au-dessus — ou au-dessous — du plan II; si m est sur $m_0\alpha_1$, il faudrait pousser plus loin le développement de $g(x, y)$ pour trouver le signe de δ.

APPLICATION. — Si au point M_0, f'_x et f'_y sont nuls, le plan II tangent à Σ est parallèle à xOy. Les points de Σ voisins de M_0 ne sont tous d'un même côté de II que si $s_0^2 - r_0 t_0 < 0$; c'est dans ce cas seulement que la fonction f présente un extremum en M_0 (II, n° 154).

EXEMPLES. — La surface Σ_1 ($z = x^2 + y^2$) est du même côté du plan xOy, tangent en O. Au contraire la surface Σ_2 ($z = xy$) traverse le plan xOy, tangent en O.

II. SURFACES RÉGLÉES

91. *Plans tangents aux divers points d'une génératrice.* — 1° DÉFINITION. — **On appelle surface réglée toute surface qui peut être engendrée par une droite dont la position dépend d'un paramètre.**

Les différentes positions de cette droite sont les *génératrices* de la surface.

Nous définirons la surface réglée Σ en donnant une courbe directrice $\mathfrak{L}$, représentée paramétriquement au moyen du paramètre propre u; u peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle réel $\mathcal{C}$; soit $P(u)$ le point générique de $\mathfrak{L}$. La direction de la génératrice G issue de P est déterminée par un vecteur $\vec{l}$, fonction de u.

Si le vecteur $\vec{l}$ est constant, la direction de G est fixe, et la surface Σ est un cylindre; nous écarterons ce cas dans la suite.

En définitive, M étant le point générique de G, donc de Σ,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \rho\,\vec{l} = \vec{F}(u, \rho).$$

2° **Plan tangent en un point M d'une génératrice G. Cas général.** — Le plan tangent au point M de la génératrice $G(u)$ donnée est déterminé par les vecteurs

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho} = \vec{l}, \qquad \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = \frac{d\vec{P}}{du} + \rho \frac{d\vec{l}}{du},$$

si ceux-ci ne sont ni nuls, ni colinéaires.

Construisons ces vecteurs à partir du point P (fig. 105);

$$\overrightarrow{Pk} = \vec{l}; \qquad \overrightarrow{P\mu} = \frac{d\vec{P}}{du}, \qquad \overrightarrow{P\nu} = \frac{d\vec{l}}{du}$$

sont indépendants de ρ; posons

$$\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{P\mu} + \rho\overrightarrow{P\nu},$$

K décrit, quand ρ varie la droite Δ passant par μ parallèle à $P\nu$; le plan tangent Π en M est le plan (PG, PK).

Plaçons-nous dans le cas général où les vecteurs $\vec{l}, \frac{d\vec{P}}{du}, \frac{d\vec{l}}{du}$ ne sont pas coplanaires :

$$\text{dét}\left[\vec{l}, \frac{d\vec{l}}{du}, \frac{d\vec{P}}{du}\right] \neq 0.$$

La droite PG n'est pas dans le plan $\mu P\nu$, les vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ ne sont pas

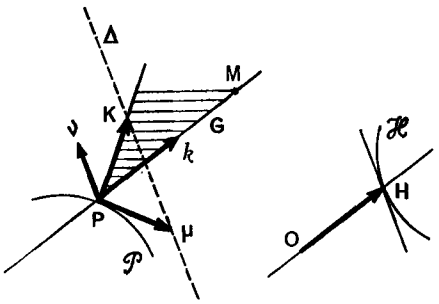


FIG. 105.

colinéaires : en tout point M de G il existe un plan tangent Π à Σ, et celui-ci contient G.

Soit ξ, η, ζ les coordonnées de P; α, β, γ les composantes scalaires de $\vec{l}$; les coordonnées de M sont

$$x = \xi + \rho\alpha,$$
$$y = \eta + \rho\beta,$$
$$z = \zeta + \rho\gamma,$$

et l'équation du plan tangent Π en M est, en désignant par X, Y, Z les coordonnées du point générique de Π :

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi' + \rho\alpha' & \eta' + \rho\beta' & \zeta' + \rho\gamma' \end{vmatrix} = 0$$

les dérivées étant prises par rapport à u.

3° **Correspondance entre M et Π lorsque M décrit G.** *a) Plan asymptote.* — Si ρ tend vers l'infini, Π a pour position limite le plan Π_∞ mené par G parallèle à Δ; c'est aussi le plan PG, Pν.

On dit que le plan Π_∞ est le *plan asymptote* de Σ relatif à G; c'est le plan tangent à Σ au point à l'infini sur G.

b) Correspondance homographique. — A tout point M donné sur G on associe le plan tangent Π à Σ en M; Π contient G.

Réciproquement, un plan Π donné contenant G coupe Δ en K (à distance finie ou à l'infini), et il existe ρ tel que

$$\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{P\mu} + \rho\,\overrightarrow{P\nu}$$

Π est tangent à Σ au point M déterminé par ρ.

Finalement, il existe une correspondance biunivoque entre M et Π :

$$M \longleftrightarrow \rho \longleftrightarrow K \longleftrightarrow \Pi.$$

D'autre part,

sur la génératrice G, $(M_i) = (\rho_i)$ $\quad i = 1, 2, 3, 4$
sur la droite Δ, $(\rho_i) = (K_i)$ $\quad i = 1, 2, 3, 4.$

En coupant par la droite Δ le faisceau linéaire de plans ayant G pour arête,

$$(K_i) = (\Pi_i) \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Finalement $\quad (M_i) = (\Pi_i) \qquad i = 1, 2, 3, 4$:

le birapport de 4 points de G égale le birapport des plans tangents correspondants à Σ.

Il existe une correspondance homographique entre M, *point de* G, *et* Π, *plan contenant* G.

c) Soit $\overrightarrow{OH} = \vec{l}$; lorsque u varie, le point H décrit une courbe $\mathcal{H}$; le cône de sommet O, de directrice $\mathcal{H}$ est engendré par les parallèles aux génératrices de Σ, issues de O; ce cône est appelé *cône directeur de* Σ; le plan tangent à ce cône le long de OH est parallèle au plan (PG, Pv); le plan asymptote relatif à G est donc le plan mené par G parallèle au plan tangent au cône directeur le long de la génératrice associée.

4° **Plan central; point central.** — Dans les sous-paragraphes précédents 1°, 2°, 3° nous avions considéré une surface en géométrie affine; dans ce sous-paragraphe 4°, nous nous plaçons en géométrie métrique.

a) Lorsque ρ varie de $-\infty$ à $+\infty$, M décrit G, et le plan tangent Π en M tourne autour de G depuis la position Π_∞ (obtenue pour $\rho \to -\infty$) jusqu'à la position Π_∞ (obtenue pour $\rho \to +\infty$); c'est dire que, M décrivant G, Π effectue autour de G une rotation d'un angle plat, depuis Π_∞ jusqu'à Π_∞.

b) On appelle *plan central* relatif à la génératrice G le plan Π_0 mené par G perpendiculaire au plan asymptote Π_∞; Π_0 est tangent à Σ en un point Ω qu'on appelle *point central* de la génératrice G. Quand G engendre Σ, le point Ω décrit une courbe qui est dite *ligne de striction* de Σ.

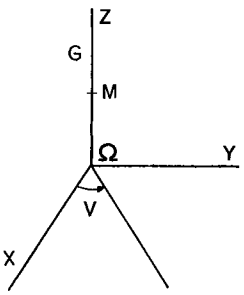


FIG. 106.

Prenons Ω pour origine d'un repère orthonormé, ΩZ confondu avec G, XΩZ et YΩZ étant respectivement le plan central et le plan asymptote relatifs à G (fig. 106).

Au point $M(\overline{\Omega M} = Z)$, le plan tangent Π a pour équation $Y = \lambda X$; il y a correspondance homographique entre Z et λ;

$$\begin{array}{c|c|c} Z & 0 & \infty \\ \hline \lambda & 0 & \infty \end{array}$$

la correspondance est donc linéaire :

$$\lambda = mZ, \qquad m \text{ étant une constante;}$$

V étant l'angle plan du dièdre (Π_0, Π).

$$\operatorname{tg} V = mZ.$$

5° **Génératrices exceptionnelles.** — Revenons au cas où la surface Σ est étudiée en géométrie affine, et étudions maintenant ce qui arrive lorsque pour une valeur u du paramètre, $\vec{l}$, $\frac{d\vec{l}}{du}$, $\frac{d\vec{P}}{du}$ sont coplanaires :

$$\det\left[\vec{l}, \frac{d\vec{l}}{du}, \frac{d\vec{P}}{du}\right] = 0.$$

La droite Δ s'appuie alors sur la droite G; les vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ ne sont colinéaires que pour la valeur ρ telle que le vecteur $\mu \vec{K} = \rho \vec{P\nu}$ ait son extrémité K sur la droite G; soit L le point correspondant de G; en L, on ne peut affirmer l'existence d'un plan tangent; pour tout autre point M de G, il existe un plan tangent, le plan des trois vecteurs $\vec{Pk}$, $\vec{P\mu}$, $\vec{P\nu}$, donc indépendant de la position de M.

92. *Surface développable.* — 1° Gardons les notations du n° 91 et plaçons-nous dans le cas où il existe un intervalle réel $\mathcal{C}$ tel que

$$\text{(1)} \qquad \det\left[\vec{l}, \frac{d\vec{l}}{du}, \frac{d\vec{P}}{du}\right] = 0, \qquad \forall u \in \mathcal{C}.$$

D'après le n° 91, 5°, à toute génératrice G de Σ est attaché un plan Π qui est tangent à Σ en tout point de G, sauf en un point exceptionnel L. *On dit alors que la surface Σ est développable.*

DÉFINITION. — **On appelle surface développable** (ou simplement développable) **une surface régiée Σ qui, pour chaque génératrice, possède la propriété suivante : en deux points quelconques distincts d'une génératrice, Σ admet le même plan tangent.**

2° Plaçons-nous dans le cas où $\vec{l}$ et $\frac{d\vec{l}}{du}$ ne sont pas colinéaires (il en est certainement ainsi si, en géométrie métrique, $\vec{l}$ est un vecteur unitaire); les vecteurs $\vec{l}$, $\frac{d\vec{l}}{du}$, $\frac{d\vec{P}}{du}$ sont coplanaires, pour chaque valeur de u; il existe deux scalaires $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ tels que

$$\text{(2)} \qquad \frac{d\vec{P}}{du} = \varphi(u)\,\vec{l} + \psi(u).\frac{d\vec{l}}{du}, \qquad \forall u \in \mathcal{C}$$

φ et ψ sont les coordonnées de $\frac{d\vec{P}}{du}$ dans la base formée par $\vec{l}$ et $\frac{d\vec{l}}{du}$.

En un point M quelconque de G,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u} = \varphi\,\vec{l} + (\psi + \rho)\dfrac{d\vec{l}}{du} & \text{(en tenant compte de (2))} \\ \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \rho} = \vec{l}. \end{cases}$$

a) En tout point de G tel que $\rho \neq -\psi$, les vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho}$ déterminent le même plan que $\vec{l}$ et $\frac{d\vec{l}}{du}$; on retrouve que le plan tangent à Σ est le même en un point quelconque de G.

b) Au point L de G tel que $\rho = -\psi$, les vecteurs tangents aux courbes coordonnées sont colinéaires, le plan tangent a Σ n'est pas défini.

c) Étudions la ligne $\mathfrak{L}$ décrite sur Σ par le point singulier L associé à chaque génératrice :

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OP} - \psi . \vec{l}.$$

(3) $$\frac{\overrightarrow{dL}}{du} = \left(\varphi - \frac{d\psi}{du}\right)\vec{l} \text{ en tenant compte de (2).}$$

I. — Si $\varphi - \frac{d\psi}{du} = 0, \quad \forall u \in \mathcal{C}, \quad \frac{\overrightarrow{dL}}{du} = \vec{0}, \quad \forall u \in \mathcal{C},$

c'est donc que $\overrightarrow{OL}$ est un vecteur constant, L est un point fixe, et Σ est alors une surface conique de sommet L.

II. — Dans le cas général où $\varphi - \frac{d\psi}{du}$ n'est pas nul pour tout u, l'égalité (3) exprime que $\mathfrak{L}$ est tangente en L à G.

En d'autres termes, **les génératrices G de la développable Σ sont les tangentes à une courbe gauche $\mathfrak{L}$; $\mathfrak{L}$ est appelée arête de rebroussement de la surface développable.**

III. — Coupons la surface Σ par un plan Q contenant O; G perce Q en un point M dont le paramètre ρ est donné par

$$\alpha \vec{A} + \beta \vec{B} = \overrightarrow{OP} + \rho \vec{l},$$

$\vec{A}$ et $\vec{B}$ étant deux vecteurs non colinéaires de Q; α et β sont les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\vec{A}, \vec{B}$; en dérivant par rapport à u on obtient

(4) $$\alpha' \vec{A} + \beta' \vec{B} = \left(\varphi + \frac{d\rho}{du}\right)\vec{l} + (\psi + \rho)\frac{d\vec{l}}{du}.$$

En un point commun à $\mathfrak{L}$ et Q, $\psi + \rho = 0$, et, dans le cas général où la génératrice G n'est pas située dans Q, $\vec{l}$ n'est pas coplanaire avec $\vec{A}$ et $\vec{B}$, nécessairement $\varphi + \frac{d\rho}{du} = 0$, et par suite $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$.

La section A de Σ par Q présente donc un point stationnaire en chaque point commun à $\mathfrak{L}$ et à Q; cela explique la dénomination d'arête de rebroussement donnée à $\mathfrak{L}$.

3° **Surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche.** — Nous avons vu, au 2°, que les génératrices d'une surface développable étaient tangentes en général à une courbe gauche.

Montrons, inversement :

THÉORÈME. — **Les tangentes à une courbe gauche quelconque engendrent une surface développable.**

Soit $\mathfrak{L}$ la ligne décrite par un point L; soit u un paramètre de représentation propre pour $\mathfrak{L}$.

Le point générique M de la tangente G en L à $\mathfrak{L}$ est défini par

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OL} + \rho \frac{\overrightarrow{dL}}{du}.$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \rho} = \frac{\overrightarrow{dL}}{du}; \qquad \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} = \frac{\overrightarrow{dL}}{du} + \rho \frac{\overrightarrow{d^2L}}{du^2}.$$

Si $\rho = 0$, les deux vecteurs précédents coïncident; si $\rho \neq 0$, ces deux vecteurs déterminent en tout point M de G, le plan tangent qui, contenant $\frac{\overrightarrow{dL}}{du}$ et $\frac{\overrightarrow{d^2L}}{du^2}$, est le plan oscillateur en L à $\mathfrak{L}$.

La surface Σ engendrée par G est développable, et $\mathfrak{L}$ est son arête de rebroussement.

4° Enveloppe d'un plan dépendant d'un paramètre. — Le plan tangent en un point d'une surface développable ne dépend que de la génératrice G à laquelle appartient ce point; il ne dépend donc que du paramètre qui détermine G.

Les plans tangents à une surface développable forment une famille à un paramètre.

Inversement, montrons en général :

THÉORÈME. — **Une famille quelconque de plans dépendant d'un paramètre est la famille des plans tangents à une surface développable.**

Le paramètre λ prenant toutes les valeurs d'un intervalle réel $\mathcal{C}$, soit P_λ le plan représenté par l'équation

(1) $$A(\lambda)\,x + B(\lambda)\,y + C(\lambda)\,z + D(\lambda) = 0.$$

Peut-on trouver dans le plan P_λ un point M (ξ, η, ζ) tel que la courbe Γ décrite par M soit tangente à P_λ?

I. *Analyse.* — Supposons que M existe :

(2) $$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C}$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) $$A'\xi + B'\eta + C'\zeta + D' + A\xi' + B\eta' + C\zeta' = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C}.$$

La condition de contact entre Γ et P se traduit par

(4) $$A\xi' + B\eta' + C\zeta' = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C}$$

(3) et (4) $\Longrightarrow$ (5) $$A'\xi + B'\eta + C'\zeta + D' = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C}.$$

M est donc situé nécessairement sur la droite G commune au plan P_λ et au plan

(6) $$(P'_\lambda) \qquad A'(\lambda)\,x + B'(\lambda)\,y + C'(\lambda)\,z + D'(\lambda) = 0.$$

II. *Synthèse.* — Inversement, considérons la surface réglée Σ engendrée par la droite G commune aux plans P_λ et P'_λ. Soit Γ une courbe tracée sur Σ; elle rencontre G en un point M dont les coordonnées ξ, η, ζ vérifient (2) et (5); par suite, à cause de (3), les dérivées ξ', η', ζ' vérifient (4); si donc M n'est pas stationnaire pour Γ, la tangente MT en M à Γ est située dans P_λ.

Cette tangente est-elle distincte de G?

(5) $\Longrightarrow$ (7) $$A'\xi' + B'\eta' + C'\zeta' + A''\xi + B''\eta + C''\zeta + D'' = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C}.$$

La relation (8) $A'\xi' + B'\eta' + C'\xi' = 0$ n'est vérifiée que si

(9) $$A''\xi + B''\eta + C''\zeta + D'' = 0$$

l'est aussi pour la même valeur de λ. Si donc M n'est pas à l'intersection L de G avec le plan

(10) $$(P''_\lambda) \qquad A''(\lambda)\,x + B''(\lambda)\,y + C''(\lambda)\,z + D''(\lambda) = 0,$$

MT est distincte de G, et le plan tangent en M à Σ est le plan P_λ.

Au point L, MT coïncide avec G, et le plan tangent à Σ n'est pas défini.

Σ est donc une surface développable; on dit que Σ est enveloppée par P_λ.

L'arête de rebroussement est engendrée par le point L commun aux plans P_λ, P'_λ, P''_λ.

La droite G est dite *droite caractéristique* du plan variable P_λ.

5° Les surfaces développables sont donc caractérisées par le fait que leurs plans tangents forment une famille à un paramètre.

Les surfaces autres que les surfaces développables sont donc caractérisées par le fait que leurs plans tangents forment une famille à deux paramètres, les deux paramètres étant ceux qui déterminent la position d'un point sur la surface.

***6° Développable contenant une courbe gauche.** — Si Γ est une courbe quelconque tracée sur une développable Σ, par tout point M de Γ passe une génératrice G de Σ et le plan Π tangent en M à Σ est tangent en M à la courbe Γ.

Inversement, soit une courbe gauche Γ, définie par un paramètre de représentation propre λ :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(\lambda), \qquad \lambda \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}; \qquad f, g, h \text{ coordonnées de M.}$$

Associons à chaque valeur λ de $\mathcal{C}$ un plan Π tangent en M à Γ :

(1) $$u(x-f)+v(y-g)+w(z-h)=0;$$

u, v, w sont des fonctions de λ telles que

(2) $$uf'+vg'+wh'=0 \qquad \forall \lambda \in \mathcal{C}.$$

Le plan Π enveloppe une développable Σ, et la droite caractéristique de Π est, compte tenu de (2), l'intersection de ce plan avec

(3) $$u'(x-f)+v'(x-g)+w'(z-h)=0$$

G passe par M, et par suite Σ contient Γ.

Σ n'admettra Γ pour arête de rebroussement que si, pour tout M, Π est le plan osculateur à Γ.

*7° **Développable circonscrite à une surface.** — Si une développable Σ et une surface $\mathcal{S}$ se raccordent le long d'une courbe Γ, Σ est enveloppée par le plan tangent à $\mathcal{S}$ en chaque point M de Γ.

Inversement, soit Γ une courbe tracée sur la surface $\mathcal{S}$, Π le plan tangent à $\mathcal{S}$ en un point M de Γ. Lorsque M décrit Γ, Π enveloppe une développable Σ. La droite caractéristique G de Π passe M, d'après le 7°, et elle est distincte de la tangente MT en M à Γ, dans le cas général où Π n'est pas osculateur à Γ (Γ serait alors une ligne asymptotique de $\mathcal{S}$, cf. n° 137). G et MT définissent le plan tangent commun à Σ et à $\mathcal{S}$ en M; Σ et $\mathcal{S}$ se raccordent le long de Γ.

93. *Surface réglée engendrée par une droite dont on connaît les équations canoniques.* — 1° On donne souvent, dans la pratique, une droite G par ses équations canoniques

$$G \begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$$

a, b, p, q étant des fonctions de u définies, continues, continûment dérivables sur un champ réel $\mathcal{C}$; G engendre une surface réglée Σ.

Le point $P(p, q, 0)$ décrit la trace $\mathfrak{L}$ de Σ sur le plan xOy; G est dirigée par le vecteur $\vec{l}$; si $\overrightarrow{OH} = \vec{l}$, le point H $(a, b, 1)$ décrit une courbe $\mathcal{H}$ dans le plan de cote 1.

(Nous écartons le cas où H serait fixe, et où Σ serait une surface cylindrique.)

Les courbes coordonnées sur Σ sont :

a) les génératrices (u = constante)

b) les sections par les plans parallèles au plan xOy (z = constante).

2° D'après les résultats des n^{os} 91 et 92, la surface Σ est développable ou non suivant que

$$\text{dét}\left[\vec{l}, \frac{d\vec{l}}{du}, \frac{d\vec{P}}{du}\right] = \begin{vmatrix} a & a' & p' \\ b & b' & q' \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a'q' - b'p'$$

est nul ou non, quel que soit u dans $\mathcal{C}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que Σ soit développable s'écrit

$$a'q' - b'p' = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{C}, \qquad \text{ou} \qquad da.dq - db.dp = 0.$$

3° Dans le cas général, on obtient rapidement le plan tangent au point M de cote z sur G_u en prenant un plan quelconque contenant G_u

$$Y - bZ - q - \lambda(X - aZ - p) = 0$$

et en exprimant que ce plan contient la direction du vecteur

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(a'z + p',\ b'z + q',\ 0),$$

d'où

$$\lambda = \frac{b'z + q'}{a'z + p'}.$$

Dans le cas où Σ est développable, cette expression donne la cote $-\frac{q'}{b'} = -\frac{p'}{a'}$ du point de G_u situé sur l'arête de rebroussement.

III. SURFACES REPRÉSENTÉES PAR UNE ÉQUATION CARTÉSIENNE

94. *Point régulier. Point singulier.* — 1° **Rappels.** — Soit f une fonction réelle des variables réelles x, y, z, définie, continue, admettant des dérivées partielles continues su un champ $\mathcal{C} \subset R^3$.

Si x_0, y_0, z_0 est un point de $\mathcal{C}$ tel que

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

on peut trouver (II, 151) un voisinage $\mathcal{D}$ de (x_0, y_0) tel qu'il existe une fonction $\varphi(x, y)$, qui soit, sur $\mathcal{D}$, continue, pourvue de dérivées partielles, et qui vérifie

$$f[x, y, \varphi(x, y)] = 0, \qquad \forall\, x, y \in \mathcal{D}; \qquad z_0 = \varphi(x_0, y_0).$$

Les dérivées partielles de φ sont données par

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) + f'(x, y, z)\,\varphi'_x(x, y) = 0; \\ f'_y(x, y, z) + f'_z(x, y, z)\,\varphi'_y(x, y) = 0; \end{cases}$$

elles sont donc continues en tout point de $\mathcal{D}$.

En d'autres termes, l'espace géométrique $\mathcal{E}_3$ étant rapporté au repère $S(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il existe une nappe simple contiuûment dérivable passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et vérifiant l'équation

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Si $f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, mais si $f'_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, [resp. $f'_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$] on arrive au même résultat avec une fonction $\psi(y, z)$ [resp. $\gamma(x, z)$].

Si $f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0$, $f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, on ne peut énoncer un résultat général.

Nous n'envisagerons dans ce qui suit que les cas où l'équation (1) définit un ensemble de nappes simples continûment dérivables; nous appellerons surface Σ définie par l'équation (1) la réunion de toutes ces nappes.

EXEMPLE. — Soit $f(x, y, z) = z^2 - 2(x + y)z + x^2 + y^2 - 1.$ (1)

Sur le champ $\mathcal{C}$ défini par $2xy + 1 > 0$, l'équation (1) $f(x, y, z) = 0$ admet deux racines réelles en z; chacune d'elles définit une nappe continûment dérivable

$$z = x + y + \varepsilon\sqrt{2xy + 1} \qquad \varepsilon = +1 \text{ ou } -1.$$

En tout point de la courbe $\mathfrak{L}$ d'équations

$$z = x + y, \qquad 2xy + 1 = 0,$$

f'_z est nul, mais $f'_x = 2(x - z)$ et $f'_y = 2(y - z)$ ne sont pas nuls; on pourra considérer $\mathfrak{L}$ comme située sur les nappes continûment dérivables qu'on peut obtenir en résolvant l'équation (1) soit par rapport à x, soit par rapport à y.

L'équation (1) définit une surface Σ.

2° **Définitions.** — **$M_0(x_0, y_0, z_0)$ étant un point de la surface $\Sigma[f(x_0, y_0, z_0) = 0]$, M_0 est dit point régulier (ou point ordinaire) si**

$$f'_x(x_0, y_0, z_0), \qquad f'_y(x_0, y_0, z_0), \qquad f'_z(x_0, y_0, z_0)$$

ne sont pas simultanément nuls;

M_0 est dit singulier si

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Les notions précédentes ne dépendent pas du repère utilisé (même démonstration qu'au n° 53).

Remarque. — Comme au n° 53, nous écarterons le cas où Σ ne comporterait que des points singuliers.

3° **Plan tangent en un point régulier.** — Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier de la surface Σ; soit $\mathfrak{L}$ une courbe continûment dérivable tracée sur Σ, passant par M_0, et soit u un paramètre de représentation propre pour $\mathfrak{L}$ (ce pourra être x, ou y, ou z). Il existe un intervalle réel $\mathcal{C}_1$ tel que

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \varphi(u) \\ y = \psi(u) \\ z = \theta(u) \end{cases} \qquad f[\varphi(u), \psi(u), \theta(u)] = 0, \qquad \forall u \in \mathcal{C}_1$$

avec $x_0 = \varphi(u_0), \quad y_0 = \psi(u_0), \quad z_0 = \theta(u_0), \quad u_0 \in \mathcal{C}_1$

$$(2) \Longrightarrow f'_x(\varphi, \psi, 0)\varphi'(u) + f'_y(\varphi, \psi, \theta)\psi'(u) + f'_z(\varphi, \psi, \theta)\theta'(u) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{C}_1$$

et en particulier, pour u_0,

$$(3) \quad f'_x(x_0, y_0, z_0)\varphi'(u_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)\psi'(u_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)\theta'(u_0) = 0.$$

Le vecteur $\vec{v}\,[\varphi'(u_0), \psi'(u_0), \theta'(u_0)]$ dirige la tangente en M_0 à $\mathfrak{L}$; on peut supposer $\vec{v} \neq \vec{0}$, en prenant pour u l'une des coordonnées du point générique de $\mathfrak{L}$. Si x, y, z est un point générique de la tangente en M_0 à $\mathfrak{L}$, $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ sont aussi des paramètres directeurs de cette tangente, et (3) entraîne

$$(4) \quad (x - x_0)f'_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Telle est l'équation du plan tangent à Σ en M_0.

En appelant X, Y, Z les coordonnées du point générique du plan tangent, on retiendra l'équation de ce plan sous la forme

$$(5)\qquad \boxed{(X - x)\, f'_x(x, y, z) + (Y - y)\, f'_y(x, y, z) + (Z - z)\, f'_z(x, y, z) = 0.}$$

Si le repère est orthonormé, le vecteur f'_x, f'_y, f'_z, c'est-à-dire $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ (n° 187) dirige la normale en M (x, y, z) à Σ; cette normale a pour équations

$$\frac{X - x}{f'_x} = \frac{Y - y}{f'_y} = \frac{Z - z}{f'_z}.$$

EXEMPLE. — Pour la surface Σ donnée en exemple au 1°, l'équation du plan tangent est

$$(X - x)(x - z) + (Y - y)(y - z) + (Z - z)(z - x - y) = 0,$$

ou, en tenant compte de ce que $x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y)z = 1$,

$$(x - z)X + (y - z)Y + (z - x - y)Z - 1 = 0.$$

En tout point de la ligne $\mathcal{L}$ définie pour cet exemple, le plan tangent est parallèle à Oz.

REMARQUE I. — L'équation (4) peut encore s'obtenir de la façon suivante.

Si $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, il existe une nappe simple continûment dérivable contenant M_0; cette nappe est représentée par l'équation $z = \varphi(x, y)$ du 1°. Le plan tangent en M_0 à cette nappe est donné par l'étude du n° 90 :

$$z - z_0 = (x - x_0)\, \varphi'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\, \varphi'_y(x_0, y_0).$$

En remplaçant $\varphi'_x(x_0, y_0)$ et $\varphi'_y(x_0, y_0)$ par leurs valeurs (II, n° 152, 3°) on retrouve l'équation (4).

Si $f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, mais si $f'_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, on considère une nappe simple $x = \psi(y, z)$ contenant M_0 et l'on obtient encore l'équation (4).

REMARQUE II. — En utilisant la remarque du n° 89, 1°, et la remarque précédente, on peut affirmer que toute droite issue de M_0 dans le plan tangent en M_0 à Σ est tangente à une courbe passant par M_0 et tracée sur Σ.

4° **Plan tangent à l'origine.** — On peut généraliser à l'espace l'étude du n° 55.

Si $f(0, 0, 0) = 0$, la surface Σ contient l'origine O.

Supposons que l'on sache trouver un développement limité de $f(x, y, z)$ suivant les puissances croissantes de x, y, z :

$$f(x, y, z) = ax + by + cz + \varphi_2(x, y, z) + H(x, y, z),$$

a, b, c étant des constantes, φ_2 un polynôme homogène de degré 2 en x, y, z, et H une fonction infiniment petite d'ordre supérieur à 2 par rapport à $\left\| \overrightarrow{OM} \right\|^2$.

L'origine est un point régulier si, et seulement si, a, b, c ne sont pas nulles toutes les trois, et alors le plan tangent en O a pour équation

$$ax + by + cz = 0.$$

REMARQUE. — Si a, b, c sont nulles toutes les trois, O est un point singulier de Σ.

Si l'équation $\varphi_2(x, y, z) = 0$ est celle d'un cône *réel* de sommet O, les génératrices de ce cône sont les tangentes en O à Σ; ce cône est appelé cône des tangentes en O.

5° **Contact d'une courbe et d'une surface.** — *a)* DÉFINITIONS. — *Une droite est dite tangente en* M *à une surface* Σ *si elle est tangente en* M *à une courbe tracée sur la surface.*

Si M est un point régulier de Σ, une tangente en M à Σ ne peut être qu'une droite passant par M, et située dans le plan tangent en M à Σ.

Une courbe est dite tangente en M *à une surface* Σ *si la tangente en* M *à la courbe est tangente à la surface.*

b) Nous nous bornerons au cas où la courbe Γ est donnée par une représentation paramétrique propre

$$\overrightarrow{OM} = F(u) \qquad x = \varphi(u), \qquad y = \psi(u), \qquad z = \theta(u)$$

et où la surface Σ est donnée par une équation cartésienne

$$f(x, y, z) = 0.$$

Une étude analogue à celle qui a été faite dans le plan (n° 58) conduit au résultat suivant :

soit $\mathcal{F}(u) = 0$, avec $\mathcal{F}(u) = f[\varphi(u), \psi(u), \theta(u)]$

l'équation aux u des points communs à Σ et Γ; pour que Γ soit tangente à Σ, en un point (non imposé à l'avance) ordinaire pour Γ et Σ, il faut que l'équation $\mathcal{F}(u) = 0$ admette une racine multiple.

En résumé, *pour que la courbe* Γ *soit tangente à la surface* Σ, *il faut que l'équation aux u des points communs à* Γ *et à* Σ *ait une racine multiple.* On est en mesure d'affirmer que la condition est suffisante si on peut vérifier que le point obtenu est ordinaire pour Γ et pour Σ. En particulier on peut exprimer ainsi qu'une droite est tangente à une surface.

95. ***Tangente à la courbe d'intersection de deux surfaces.*** — 1° **Existence et équations.** — Soit deux surfaces Σ et Σ′ d'équations

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0 \qquad (2) \qquad g(x, y, z) = 0,$$

les fonctions f et g étant continues et admettant des dérivées partielles continues sur un domaine $\mathcal{D}$, partie de R^3.

Il résulte de l'étude faite un tome II, n° 153 que si $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est une solution commune de (1) et (2), et si la matrice

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \end{bmatrix}$$

est de rang 2 pour M_0, il existe une courbe Γ continûment dérivable, située à la fois sur Σ et Σ′, et passant par M_0.

La tangente en M_0 à cette ligne se trouve dans chacun des plans tangents en M_0 à S et S', plans tangents distincts d'après l'hypothèse faite sur le rang de la matrice (ℭ) au point M_0. Cette tangente a donc pour équations

$$\begin{cases} (x - x_0)\, f'_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\, f'_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\, f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ (x - x_0)\, g'_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\, g'_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\, g'_z(x_0\, y_0, z_0) = 0. \end{cases}$$

2° Exercice. — *Trouver la tangente et le plan osculateur au point* A (0, 0, R) *à la courbe* Γ *définie par les équations*

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2ax = 0. \tag{3}$$

La matrice ℭ considérée plus haut est

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x - 2a & 2y & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et, au point A,} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2R \\ -2a & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Des paramètres directeurs de la tangente en A sont donc (0, — 4 aR, 0) : cette tangente est parallèle à l'axe Oy.

Pour trouver le plan osculateur en A, nous pouvons considérer, au voisinage de A, x et z comme des fonctions de y. Les dérivées premières de ces fonctions sont données par les équations

$$xx' + y + zz' = 0,$$
$$xx' + y - ax' = 0$$

et les dérivées secondes par les équations

$$x'^2 + 1 + z'^2 + xx'' + zz'' = 0,$$
$$x'^2 + 1 + xx'' - ax'' = 0.$$

Au point A on trouve

$$x'_0 = 0, \qquad z'_0 = 0, \qquad x''_0 = \frac{1}{a}, \qquad z''_0 = -\frac{1}{R}.$$

En remarquant que l'on peut écrire $y'_0 = 1$, $y''_0 = 0$ puisque y est la variable indépendante, l'équation du plan osculateur peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} x & y & z - R \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{R} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$R(z - R) + ax = 0.$$

Le lecteur pourra vérifier que la trace de ce plan sur le plan xOz est bien tangente à la projection de la courbe sur ce plan parallèlement à Oy, cette direction étant celle de la tangente en A.

3° **Section d'une surface par un de ses plans tangents.** — Prenons le point A de Σ comme origine; choisissons deux axes Ax, Ay dans le plan tangent en A à Σ, l'axe Az étant quelconque.

Σ a une équation de la forme (cf n° 94, 4°)

$$z + \varphi_2(x, y, z) + H(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

et la section Γ par le plan xAy a pour équation

$$\varphi_2(x, y, 0) + H(x, y, 0) = 0;$$

l'origine est un point singulier pour Γ; si $\varphi_2(x, y, 0) = 0$ représente deux droites réelles distinctes, ces droites sont tangentes en A à Γ.

4° **Intersection de deux surfaces tangentes.** — En rapportant les surfaces à un système d'axes Ax, Ay, Az dont l'origine est le point de contact A, Ax et Ay étant situés dans le plan tangent commun, leurs équations sont de la forme (3) et (4)

$$z + \psi_2(x, y, z) + K(x, y, z) = 0. \tag{4}$$

La courbe commune Γ est l'intersection de Σ, par exemple, avec la surface $\mathcal{S}$ d'équation

$$\varphi_2(x, y, z) - \psi_2(x, y, z) + H(x, y, z) - K(x, y, z) = 0.$$

A est un point singulier pour $\mathcal{S}$, donc pour Γ.
Si l'équation

$$\varphi_2(x, y, 0) - \psi_2(x, y, 0) = 0$$

représente deux droites réelles distinctes, dans le plan xAy, ce sont les tangentes en A à Γ.

96. ***Surface de la complétion projective d'un espace affine.*** — Nous désignons par $\mathfrak{E}$ la complétion projective de l'espace affine réel $\mathcal{E}$, de dimension trois. $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Nous appelons *surface* la partie Σ de $\mathfrak{E}$ formée par les points M dont un système de coordonnées homogènes vérifie

$$F(X, Y, Z, T) = 0, \tag{1}$$

où F désigne une fonction de quatre variables réelles, homogène de degré $n \neq 0$.

La restriction de Σ à $\mathcal{E}$ est la surface représentée par

$$f(x, y, z) = 0 \qquad \text{avec} \qquad F(X, Y, Z, T) = T^n f\left(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}\right) \tag{2}$$

Inversement, comme au n° 56, 2°, en partant de la surface Σ de $\mathcal{E}$ définie par (2), on obtient, en construisant la fonction homogène F, ce qu'on appelle la complétion projective de Σ.

Une étude analogue à celle du n° 56 conduit aux résultats suivants :

1° **Point régulier (ou ordinaire).** — Un point M de la surface Σ est régulier (ou ordinaire) si l'une, au moins, des quatre dérivées partielles de F n'est pas nulle au point M; il s'agit d'une propriété dans le cas d'un point à distance finie, d'une convention dans le cas d'un point à l'infini.

2° **Plan tangent en un point régulier.** — Une équation homogène du plan tangent à Σ au point régulier $M_0(X_0, Y_0, Z_0, T_0)$, à distance finie ou à l'infini est

$$XF'_x(X_0, Y_0, Z_0, T_0) + YF'_Y(X_0, \ldots) + ZF'_Z(X_0, \ldots) + TF'_T(X_0, \ldots) = 0.$$

97*. ***Notions sur les surfaces algébriques.*** — 1° **Définition; ordre.** — Initialement $\mathfrak{E}_c$ désigne l'espace projectif complexe, de dimension trois, le plus général. On

appelle surface algébrique la partie Σ de $\mathfrak{P}_C$ formée par les points M dont un système de coordonnées homogènes, dans un repère donné $\mathfrak{R}$, vérifie l'équation $F(X, Y, Z, T) = 0$ dans laquelle F désigne un polynôme homogène, sur le corps des complexes.

Comme au n° **58**, on démontre que le degré, n, de ce polynôme est invariant dans un changement de repère et on dit que n est l'*ordre* de Σ. On montre que Σ est coupée en n points, distincts ou confondus, par toute droite de $\mathfrak{P}_C$ qui n'est pas une partie de Σ.

2° **Cône asymptotique.** — Dorénavant $\mathfrak{P}_C$ est le complexifié de la complétion projective $\mathfrak{P}$ de l'espace affine réel $\mathfrak{E}$; le polynôme F a des coefficients réels. On l'écrit

$$F(X, Y, Z, T) = \varphi_n(X, Y, Z) + T\varphi_{n-1}(X, Y, Z) + \ldots + T^{n-1}\varphi_1(X, Y, Z) + T^n\varphi_0.$$

Les points à l'infini de Σ sont ceux du cône $\mathcal{C}$ d'équation $\varphi_n(X, Y, Z) = 0$.
On démontre — nous l'admettrons — que celles des génératrices de $\mathcal{C}$ qui sont réelles ne sont autres que les directions asymptotiques (menées par O) des courbes tracées sur la restriction de Σ à $\mathfrak{E}$. Cela explique le nom de cône asymptotique donné au cône $\mathcal{C}$.

3° **Recherche des droites situées sur une surface algébrique.** Pour que la droite D définie par les équations

$$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

appartienne à la surface Σ d'équation $f(x, y, z) = 0$, il faut et il suffit que

$$f(az + p, \quad bz + q, \quad z) = 0 \qquad \forall z.$$

REMARQUE. — La recherche des droites d'une surface peut être facilitée par les deux observations suivantes :

I. Si une droite D appartient à une surface Σ, la trace de D sur un plan quelconque P appartient à la section de Σ par ce plan.

En particulier, le point à l'infini de D est sur la section de la surface par le plan de l'infini; cela revient à dire que la direction de D est celle de l'une des génératrices du cône des directions asymptotiques de la surface.

II. Si M est un point d'une droite D située sur Σ, la droite D est dans le plan tangent en M si ce point est ordinaire, sur le cône des tangentes en M si ce point est singulier.

En utilisant la première observation, le lecteur reconnaîtra que la surface définie par l'équation

$$xyz + a(x^2 + y^2 + z^2) = a^3$$

ne peut contenir que des droites parallèles à un plan de coordonnées; on cherchera par exemple les droites parallèles au plan yOz en les représentant par

$$x = h, \qquad z = my + p$$

(ces droites ne peuvent être parallèles à Oz), et l'on trouvera les huit solutions

$$\begin{cases} x = \varepsilon a \\ z = \varepsilon jy \text{ ou } \varepsilon j^2 y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2\varepsilon a \\ z = \varepsilon y + \varepsilon' ai\sqrt{3}, \end{cases}$$

ε et ε' désignant $+1$ ou -1, et j, j^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité.

En observant que la surface contient en outre les droites à l'infini des plans de coordonnées, on voit qu'elle possède en tout 27 droites.

4° **Surfaces unicursales.** — DÉFINITION. — *On dit qu'une surface est unicursale s'il est possible d'exprimer les coordonnées cartésiennes d'un point de cette surface en fonction rationnelle de deux paramètres.*

Soit (1) $\qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v),$

f, g, h étant rationnelles en u et v. En éliminant v entre les deux premières équations (1), on forme une relation

(2) $\qquad \rho(x, y, u) = 0$

algébrique en x, y, u, la racine commune en v s'exprimant rationnellement en fonction de x, y, u, soit $v = \varphi(x, y, u)$. En éliminant u entre l'équation (2) et l'équation

$$z = h[u, \varphi(x, y, u)] \tag{3}$$

on obtient finalement une équation

$$F(x, y, z) = 0$$

algébrique en x, y, z. *Toute surface unicursale est algébrique.*

IV. PROBLÈMES SUR LES PLANS TANGENTS

98. ***Représentation tangentielle d'une surface donnée par une équation $f(x, y, z) = 0$.*** — 1° Reprenons (n° 96) la complétion projective Σ de la surface donnée; l'équation homogène associée est

$$F(X, Y, Z, T) = 0 \tag{1}$$

(on rappelle que le degré d'homogénéité n'est pas nul).

Le plan Π de coordonnées tangentielles (u, v, w, h) est tangent à Σ, en un point à distance finie ou en un point à l'infini, si et seulement s'il existe x, y, z, t vérifiant (1) et tels que le plan tangent en ce point à Σ coïncide avec Π.

Comme au n° 57, le système ainsi obtenu

$$\begin{cases} (2) & F(x, y, z, t) = 0 \\ (3) & \dfrac{F'_x}{u} = \dfrac{F'_y}{v} = \dfrac{F'_z}{w} = \dfrac{F'_t}{h} \end{cases} \quad \text{équivaut au système} \quad \begin{cases} (4) & ux + vy + wz + ht = 0 \\ (3) & \dfrac{F'_x}{u} = \dfrac{F'_y}{v} = \dfrac{F'_z}{w} = \dfrac{F'_t}{h} \end{cases}$$

a) En général l'élimination de x, y, z, t entre (4) et (3) conduit à une seule relation

$$\Phi(u, v, w, h) = 0, \tag{5}$$

les plans tangents à Σ dépendent de deux paramètres, Σ est une surface non développable; (5) est l'équation tangentielle de Σ.

EXEMPLE. — Pour trouver la représentation tangentielle de Σ :

$$xyz = a^3, \tag{2'}$$

on élimine x, y, z entre (2') et

$$\frac{yz}{u} = \frac{zx}{v} = \frac{xt}{w} = -\frac{3a^3}{h}. \tag{3'}$$

En remplaçant yz par $\dfrac{a^3}{x}$, etc.,

$$(3') \qquad \Longrightarrow \quad x = -\frac{h}{3u}, \qquad y = -\frac{h}{3v}, \qquad z = -\frac{h}{3w}$$

et en portant dans (2'), on obtient finalement

$$h^3 + 27\,a^3uvw = 0.$$

b) Si l'équation proposée est

$$F(Y, X, Z) = 0 \tag{1}$$

homogène en X, Y, Z, elle représente un cône de sommet O; ce cône a deux équations tangentielles :

1° $h = 0$

2° l'équation obtenue en éliminant x, y, z entre

$$\frac{F'_x}{u} = \frac{F'_y}{v} = \frac{F'_z}{w} \qquad \text{et} \qquad ux + vy + wz = 0,$$

c'est-à-dire l'équation tangentielle de la courbe plane qui aurait (1) pour équation homogène

C'est ainsi que le cône représenté ponctuellement par

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

est représenté tangentiellement par

$$h = 0; \qquad u^2 + v^2 - w^2 = 0.$$

Plus généralement, si l'élimination de x, y, z, t entre les équations (3) et (4) conduit à deux relations,

$$\Phi(u, v, w, h) = 0, \qquad \Phi_1(u, v, w, h) = 0, \tag{6}$$

les plans tangents à Σ dépendent d'un seul paramètre, Σ est une surface développable; les équations (6) constituent une représentation tangentielle de cette développable; le système (6) peut être remplacé par tout système équivalent, à partir de deux combinaisons linéaires distinctes de Φ et Φ_1.

On retiendra qu'*une surface développable a deux équations tangentielles.*

Au chapitre IX (n° 107) ce résultat sera confronté avec le fait qu'une courbe de l'espace a deux équations ponctuelles.

REMARQUE. — Si x_0, y_0, z_0, t_0 est un point singulier de Σ, $ux_0 + vy_0 + wz_0 + ht_0$ est une solution particulière du problème de l'élimination de x, y, z, t entre les équations (3) et (4); il convient de l'écarter.

2° **Cas d'une surface réglée non développable.** — Il résulte de l'étude du n° 91 que la propriété caractéristique d'un plan tangent à une surface réglée Σ non développable est de contenir une génératrice G quelconque de Σ. En exprimant que le plan $\Pi(u, v, w, h)$ contient G, on formera l'équation tangentielle de Σ.

EXEMPLE. — Soit le conoïde de Plücker (III, n° 214) $z = a\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; une génératrice quelconque est représentée par $G_\theta \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = a\cos 2\theta \end{cases}$

G_θ **perce** P ($ux + vy + wz + h = 0$) en un point fourni par

$$\rho(u\cos\theta + v\sin\theta) + aw\cos 2\theta + h = 0.$$

G_θ est contenue dans P si, et seulement si

$$\begin{cases} u\cos\theta + v\sin\theta = 0 \\ aw\cos 2\theta + h = 0 \end{cases}$$

L'élimination de θ entre ces deux relations donne

$$aw\,(v^2 - u^2) + h\,(u^2 + v^2) = 0.$$

3° **Surface développable, enveloppe d'une famille de plans.** — On a vu au n° 92 que le plan

$$A(\lambda)\,x + B(\lambda)\,y + C(\lambda)\,z + D(\lambda) = 0$$

enveloppe une surface développable, Σ. Pour que le plan $\Pi\,(u, v, w, h)$ soit tangent à Σ il faut et il suffit qu'il existe λ tel que

$$\frac{A(\lambda)}{u} = \frac{B(\lambda)}{v} = \frac{C(\lambda)}{w} = \frac{D(\lambda)}{h}.$$

L'élimination de λ entre ces 3 équations donne un ensemble de deux équations tangentielles de Σ.

EXEMPLE. — Soit Σ la développable ayant pour arête de rebroussement la cubique

$$(\mathcal{C}) \qquad x = \lambda, \qquad y = \lambda^2, \qquad z = \lambda^3.$$

Elle est enveloppée par le plan osculateur en $M(\lambda)$ à $\mathcal{C}$:

$$3\lambda^2 x - 3\lambda y + z - \lambda^3 = 0,$$

d'où les conditions imposées à u, v, w, h :

$$\frac{u}{3\lambda^2} = \frac{v}{-3\lambda} = \frac{w}{1} = \frac{h}{-\lambda^3}.$$

En gardant l'égalité des rapports de rangs 1 et 2, 1 et 4, 2 et 3, on obtient

$$\begin{cases} \lambda v + u = 0 \\ \lambda u + 3h = 0 \\ 3\lambda w + v = 0 \end{cases}$$

si $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} v & u \\ u & 3h \\ 3w & v \end{bmatrix}$, rang $\mathcal{C} = 1$ exprime la représentation tangentielle de Σ.

Si $v \neq 0$, on obtient $\begin{cases} v^2 - 3uw = 0 \\ u^2 - 3hv = 0. \end{cases}$

Si $v = 0$, nécessairement $u = 0$, $h = 0$, et on obtient le plan $z = 0$ correspondant à $\lambda = 0$.

99. *Plans tangents menés par un point à une surface non développable.* — 1° **Méthodes générales.** — 1re MÉTHODE. — Soit

$$(1) \qquad F(x, y, z, t) = 0$$

une équation homogène d'une surface Σ, non développable, et x_0, y_0, z_0, t_0 des coordonnées homogènes d'un point donné M_0.

Pour que le plan tangent en $M\,(x, y, z, t)$ à Σ passe par M_0, il faut et il suffit que x, y, z, t vérifient (1) et

$$(2) \qquad x_0 F'_x + y_0 F'_y + z_0 F'_z + t_0 F'_t = 0,$$

sous réserve que M soit régulier pour Σ.

L'ensemble de ces points M est donc l'intersection de Σ avec la surface $\mathfrak{L}$ d'équation (2), à l'exception des points singuliers de Σ (ceux-ci font tous partie de $\mathfrak{L}$).

Le plan tangent en M passant par M_0, la droite M_0M est tangente en M à Σ, et inversement si une droite menée par M_0 est tangente à Σ en M, point régulier de Σ, le plan tangent en M passe par M_0.

2e MÉTHODE. — Soit

$$\Phi(u, v, w, h) = 0 \tag{3}$$

une équation tangentielle de Σ.

Les plans tangents à Σ menés par M_0 sont ceux dont les coordonnées tangentielles u, v, w, h vérifient simultanément (3) et

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 + ht_0 = 0. \tag{4}$$

2° Cône circonscrit. — *a)* DÉFINITION. — *On dit que deux surfaces Σ_1 et Σ_2 sont circonscrites le long de la ligne Γ si, Γ étant commune aux deux surfaces, celles-ci ont même plan tangent en chaque point de cette ligne.*

On dit aussi que Σ_1 et Σ_2 *se raccordent* le long de Γ; Γ est dite *ligne de contact* (ou de *raccordement*) de Σ_1 et Σ_2.

Lorsque Σ_1 est intérieure à Σ_2, on dit aussi que Σ_1 est *inscrite* à Σ_2 le long de Γ.

b) Soit $\mathcal{C}$ le lieu des points de Σ où le plan tangent passe par M_0, et M un point de $\mathcal{C}$; la droite M_0M et la tangente en M à $\mathcal{C}$ sont deux droites, distinctes en général, qui appartiennent au plan tangent en M à Σ, et au plan tangent en M au cône $\mathcal{S}$ qui a pour sommet M_0 et pour directrice la courbe $\mathcal{C}$; Σ et $\mathcal{S}$ étant tangents en un point quelconque de $\mathcal{C}$, se raccordent le long de $\mathcal{C}$.

DÉFINITION. — **On appelle cône circonscrit à Σ, de sommet M_0, le cône qui a pour génératrices les tangentes à Σ issues de M_0, et pour plans tangents les plans tangents à Σ menés par M_0.**

Dorénavant la ligne $\mathcal{C}$ sera appelée courbe de contact du cône circonscrit de sommet M_0.

3° Plans tangents menés par une droite. — Pour mener à la surface Σ les plans tangents contenant une droite D, on peut chercher les plans tangents contenant deux points M_0 et M_1 de D.

Si D est l'intersection de deux plans $P_0(u_0, v_0, w_0, h_0)$ et $P_1(u_1, v_1, w_1, h_1)$, un plan quelconque contenant D a pour coordonnées $u_0 + \lambda u_1$, $v_0 + \lambda v_1$, $w_0 + \lambda w_1$, $h_0 + \lambda h_1$, et si l'on connaît l'équation tangentielle $\Phi = 0$ de Σ, les λ des plans tangents cherchés sont racines de l'équation

$$\Phi(u_0 + \lambda u_1,\quad v_0 + \lambda v_1,\quad w_0 + \lambda w_1,\quad h_0 + \lambda h_1) = 0.$$

Si Σ est algébrique, son équation tangentielle est algébrique; *on appelle classe de Σ le degré de son équation tangentielle*; en immergeant l'espace affine réel $\mathcal{E}$ dans l'espace complété et complexifié $\mathcal{E}_C$, on peut dire que la classe est égale au nombre de plans tangents que l'on peut mener à Σ par une droite quelconque de $\mathcal{E}_C$.

4° Cas d'une surface réglée non développable. — Comme tout plan contenant une génératrice quelconque G est tangent à la surface Σ, le cône circonscrit $\mathcal{G}$ de sommet M_0 admet pour plans tangents la famille des plans (M_0, G).

Il faut adjoindre éventuellement à la courbe de contact du cône $\mathcal{G}$ les génératrices exceptionnelles le long desquelles le plan tangent est fixe et, en outre, contient M_0.

100. *Contour apparent.* — 1° Contour apparent d'une surface vue d'un point M_0.

DÉFINITION. — **On appelle contour apparent de la surface Σ vue du point M_0 l'ensemble C des points de Σ où peuvent venir se confondre deux des points communs à la surface et à une droite variable issue de M_0.**

Les points de C font partie de l'ensemble $\mathcal{M}$ des points M de Σ tels que la droite M_0M coupe Σ en deux points au moins confondus avec M :

$$\begin{cases} \text{ou bien M est singulier} \\ \text{ou bien } MM_0 \text{ est tangente en M à } \Sigma. \end{cases}$$

L'ensemble $\mathcal{M}$ est défini par les équations (1) et (2) du n° 99.

Si Σ n'a pas de ligne singulière, C ne peut comporter que des arcs appartenant à la courbe de contact du cône circonscrit de sommet M_0.

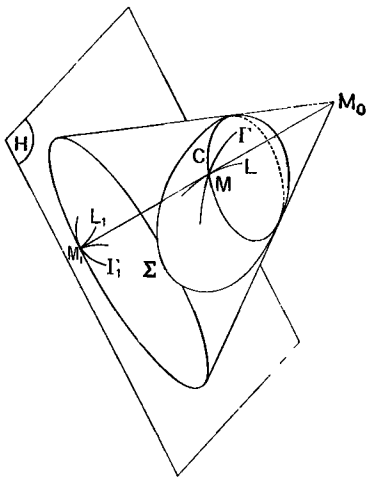


FIG. 107.

2° Contour apparent en perspective. — DÉFINITION. — **On appelle contour apparent en perspective sur le plan H, de la surface Σ vue du point M_0, la perspective sur ce plan du contour apparent de la surface vue du point M_0.**

Pour les surfaces usuelles, le contour apparent en perspective sur le plan H est la trace du cône circonscrit de sommet M_0. Nous resterons dans cette hypothèse pour étudier le 3°.

3° Propriétés du contour apparent en perspective. — *a*) Soit Γ une courbe de la surface qui coupe en M le contour apparent C. En général, les tangentes en M aux courbes C et Γ sont distinctes de MM_0 et les perspectives des courbes C et Γ étant tangentes à la trace du plan tangent en M sur le plan de projection H, sont tangentes entre elles, d'où l'énoncé suivant :

Les perspectives des courbes d'une surface sont en général tangentes au contour apparent en perspective de la surface.

La proposition est en défaut si l'une des courbes C et Γ est tangente en M à M_0M. La perspective d'une courbe L de la surface tangente en M à MM_0 est une

courbe L_1 qui admet en général comme point de rebroussement la perspective M_1 de M, la tangente de rebroussement étant la trace du plan osculateur en M à la ligne L (fig. 107).

b) Si la courbe Γ de Σ est la courbe de contact d'une surface Ω circonscrite à Σ le long de Γ, M appartient au contour apparent de Ω vue de M_0, les contours apparents en perspective des surfaces Σ et Ω sont en général tangents en M_1, d'où l'énoncé suivant :

Les contours apparents en perspective des surfaces Ω circonscrites à une surface Σ sont en général tangents à celui de Σ.

101. *Plans tangents à une surface non développable parallèles à une direction de droite donnée.* — 1° Les résultats du n° **100** continuent à être valables lorsque M_0 est le point à l'infini dans la direction Δ, de paramètres directeurs α, β, γ.

Si l'équation cartésienne de Σ est

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

les points de contact des plans tangents parallèles à Δ vérifient (1) et

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0, \tag{2}$$

sous réserve qu'ils soient réguliers pour Σ.

On appelle cylindre circonscrit à Σ, parallèlement à Δ, le cylindre qui a pour génératrices les tangentes à Σ parallèles à Δ, pour plans tangents les plans tangents à Σ parallèles à Δ.

2° Le contour apparent de Σ vue de M_0 s'appelle maintenant *contour apparent de Σ pour la direction Δ.*

Si l'on projette Σ sur un plan H, parallèlement à Δ, la projection du contour apparent pour la direction Δ s'appelle maintenant *contour apparent de Σ en projection.*

Les propriétés du contour apparent en projection sur H sont celles du contour apparent en perspective sur H.

3° Interprétation du contour apparent pour la direction Oz. — *a*) Pour qu'un point $M(x, y, z)$ de Σ appartienne au contour apparent C relatif à la direction Oz, il faut que la parallèle à Oz menée par M coupe Σ en deux points au moins confondus avec M, et pour cela que x, y, z vérifient les équations

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (2') \quad f'_z(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Les points de C sont, ou bien des points de Σ où le plan tangent est parallèle à Oz, ou bien des points singuliers de Σ.

b) Le contour apparent en projection C_1 sur le plan xOy parallèlement à Oz appartient à la courbe obtenue en éliminant z entre les équations (1) et (2'), ou λ entre les équations

$$f(x, y, \lambda) = 0 \qquad f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0,$$

ou encore en exprimant que l'équation (1), considérée comme équation en z, admet une racine double au moins en z.

Ce calcul est celui auquel on est conduit pour trouver l'enveloppe des projections γ_λ sur xOy, parallèlement à Oz, des sections Γ_λ de la surface Σ par les plans $z = \lambda$, parallèles au plan xOy. Si l'on suppose xOy horizontal, les lignes Γ_λ s'appellent *lignes de niveau de* Σ.

En résumé, le contour apparent C_1 en projection sur xOy, parallèlement à Oz, se compose d'arcs appartenant aux courbes suivantes :

I. enveloppe des projections γ_λ des lignes de niveau de Σ;

II. lignes stationnaires de la famille γ_λ, projections de lignes de niveau en tout point desquelles le plan tangent à Σ est parallèle à Oz;

III. projection des lignes singulières de Σ.

EXEMPLE I. — Le contour apparent sur xOy, pour la direction Oz de la surface

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

est la courbe $x^2 + y^2 = a^2$, courbe stationnaire de la famille des projections des lignes de niveau, d'équation générale $x^2 + y^2 = a^2 - \lambda^2$.

EXEMPLE II. — La surface Σ représentée (cf. n° 94, 1°) par

$$z^2 - 2(x + y)z + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

a pour contour apparent en projection sur xOy, la courbe $\mathcal{L}_1$

$$2xy + 1 = 0,$$

trace du cylindre circonscrit parallèle à Oz, et aussi enveloppe des lignes de niveau, qui sont ici des cercles, si l'on suppose Ox et Oy orthonormés.

EXEMPLE III. — La surface Σ représentée par

$$z^3 - 2yz^2 + (x + 3y)z - 2x = 0$$

admet pour lignes de niveau les droites

$$G_\lambda : \quad z = \lambda, \qquad x(\lambda - 2) + (3\lambda - 2\lambda^2)y + \lambda^3 = 0.$$

Le contour apparent de Σ sur le plan xOy, pour la direction Oz, comprend :

I. l'enveloppe E des projections g_λ des droites G_λ ; cette enveloppe a été obtenue au n° 71, Ex. III;

II. la droite $g_3(x - 9y + 27 = 0)$, tangente d'inflexion de E; on vérifiera qu'en tout point de G_3 le plan tangent à Σ est parallèle à Oz.

c) On retrouve la notion de contour apparent en projection quand on demande de discuter, suivant les valeurs des paramètres λ et μ, la nature et le nombre des racines de l'équation algébrique en z

$$f(\lambda, \mu, z) = 0.$$

En introduisant la surface Σ_1 d'équation $f(x, y, z) = 0$, on est ramené à discuter le nombre de points de Σ_1 situés sur une parallèle Δ à Oz : $x = \lambda$, $y = \mu$; ce nombre ne peut changer que lorsque Δ est telle que $f'_z(\lambda, \mu, z) = 0$, c'est-à-dire :

I. ou bien Δ est tangente à Σ;

II. ou bien Δ s'appuie sur une ligne singulière de Σ. Les courbes séparatrices que l'on est amené à construire constituent le contour apparent en projection de Σ.

d) Étudions les plans tangents parallèles à Oz dans le cas où Σ est définie paramétriquement :

$$(1) \qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v).$$

Le plan tangent Π en $M(u, v)$ contient les vecteurs $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial v}$. Il sera parallèle à Oz si, et seulement si :

I. ou bien un seul des vecteurs précédents est parallèle à Oz;

II. ou bien les projections des vecteurs précédents sur xOy sont des vecteurs non nuls, colinéaires.

Si m est la projection de M

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v) \tag{2}$$

ou bien l'un des vecteurs $\frac{\partial \vec{m}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{m}}{\partial v}$ est nul, ou bien les vecteurs $\frac{\partial \vec{m}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{m}}{\partial v}$ sont colinéaires.

Le lieu de ces points m est, comme on l'a vu au n° 78, l'enveloppe commune des lignes $C_v(v = \text{constante})$ et $\Gamma_u(u = \text{constante})$ obtenues à partir de (2).

On retrouve que la trace sur xOy du cylindre circonscrit parallèlement à Oz est l'enveloppe des projections d'une famille de courbes engendrant Σ.

4° **Contour apparent en projection d'une surface régiée non développable.** — Soit G une génératrice quelconque de la surface. Le plan mené par G parallèlement à Oz est tangent à la surface en un point M qui appartient au contour apparent relatif à la direction Oz et la projection de G sur xOy parallèlement à Oz est tangente au contour apparent en projection sur le plan xOy.

Le contour apparent en projection sur xOy comprend l'enveloppe des projections des génératrices. Éventuellement, il faut adjoindre à cette enveloppe les projections des génératrices particulières pour lesquelles le plan tangent est le même en tous les points, ce plan tangent étant parallèle à Oz. (Les projections de ces génératrices particulières sont des droites stationnaires de la famille des projections des génératrices.) Enfin, s'il y a sur la surface des génératrices parallèles à Oz, tous les plans passant par l'une de ces génératrices sont tangents à la surface, ces génératrices font partie du contour apparent de la surface. En projection ces génératrices donnent des points qui font partie du contour apparent en projection.

102. ***Problèmes sur les plans tangents à une surface développable.*** — 1° La façon la plus simple d'étudier les plans tangents à une surface développable Σ est d'utiliser l'équation générale, en fonction d'un paramètre λ, des plans tangents à Σ, soit

$$A(\lambda)\, x + B(\lambda)\, y + C(\lambda)\, z + D(\lambda) = 0.$$

Les plans tangents à Σ menés par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sont ceux dont les λ sont racines de

$$A(\lambda)\, x_0 + B(\lambda)\, y_0 + C(\lambda)\, z_0 + D(\lambda) = 0.$$

Ce sont les plans osculateurs à l'arête de rebroussement menés par M_0.

Les plans tangents à Σ parallèles à $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ sont ceux dont les λ sont racines de

$$A(\lambda)\, \alpha + B(\lambda)\, \beta + C(\lambda)\, \gamma = 0.$$

Autrement dit, un cône — ou un cylindre — circonscrit à Σ se décompose en un certain nombre de plans, mais chacun d'eux est tangent à Σ le long d'une génératrice.

2° Le contour apparent en perspective sur un plan H de la développable Σ vue de M_0 comprend chaque trace $\mathcal{C}_{j1}$ d'un plan tangent $\mathcal{L}$ à Σ mené par M_0, $\mathcal{C}_{j1}$ étant perspective de la génératrice $\mathcal{C}_j$ de contact entre $\mathcal{L}$ et Σ.

Il peut comprendre en outre les perspectives des lignes singulières de Σ, en particulier il comprend la perspective $\mathcal{L}_1$ de l'arête de rebroussement $\mathcal{L}$.

La perspective G_1 de la génératrice générique G de Σ enveloppe la courbe $\mathcal{L}_1$, sans que $\mathcal{L}_1$ soit la trace du cône circonscrit de sommet M_0; celle-ci est formée des droites $\mathcal{C}_{j1}$ qui sont les tangentes d'inflexion de $\mathcal{L}_1$.

3° Les plans tangents communs à deux surfaces non développables Σ_1 et Σ_2, d'équations tangentielles respectives

$$\Phi_1(u, v, w, h) = 0, \qquad \Phi_2(u, v, w, h) = 0$$

ne dépendent que d'un seul paramètre; ils sont tangents à une surface développable, Σ, et il résulte du n° 92, 7°, que cette développable est circonscrite à Σ_1 et Σ_2.

EXERCICES

1. — S étant l'une des surfaces définies par

$$a)\ \begin{cases} x = u^2 \\ y = uv \\ z = v^2 + 2u \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = au \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

étudier la section par l'un de ses plans tangents.

2. — (Γ) désigne la section par le plan $z = h$ de la surface (Σ) d'équation cylindrique

$$r = \frac{z^2 + a^2 - b^2}{2(b + a\cos\theta)}$$

(a et b sont des constantes données).

Démontrer que les plans tangents à (Σ) aux divers points de (Γ) ont un point commun dont on calculera les coordonnées.

3. — Étudier la surface (Σ)

$$x = u + \frac{1}{u}, \qquad y = v + \frac{1}{v}, \qquad z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}.$$

Rechercher les points d'intersection de (Σ) et d'une parallèle à l'axe Oz. Former l'équation cartésienne de (Σ). Rechercher les droites de la surface et montrer qu'elles forment une figure simple. Étudier (Σ) au voisinage du point ($u = 1$, $v = 1$).

4. — Étudier la surface (Σ) représentée par

$$z = \left|\frac{u - i}{u + i}\right| \qquad \text{avec} \qquad u = x + iy.$$

5. — Soit D la droite qui contient les points d'inflexion d'une sinusoïde Γ. Étudier la courbe de contact de la surface engendrée par la rotation de Γ autour de D avec un cylindre circonscrit.

6. — Les axes Ox, Oy, Oz sont rectangulaires. Soit S la surface engendrée par la rotation, autour de Oz, de la courbe Γ d'équations $[x = 0, z = \mathrm{Log}(x - a)]$. Étudier la courbe de contact de S avec un cylindre circonscrit, et, en particulier, sa projection sur le plan xOy.

7. — φ est une fonction homogène des deux variables x et y. Démontrer que le cône de sommet S(0, 0, h) circonscrit à la surface Σ d'équation $f(z) = \varphi(x, y)$ se raccorde à Σ le long de courbes planes.

8. — Trouver les points doubles à distance finie de la surface représentée par l'équation

$$\lambda z^2 = (1 - x^2)(1 - y^2) \qquad \text{(repère orthonormé)}.$$

Pour quelles valeurs de λ le cône des tangentes en un point double est-il de révolution? Lorsqu'il en est ainsi, la surface est l'ensemble des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites du plan xOy est constante.

9. — Soit S la surface déterminée par les équations paramétriques

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = av + \sqrt{b^2 - u^2} - b\,\frac{\mathrm{Log}(b + \sqrt{b^2 - u^2})}{u}.$$

Démontrer que les courbes $v = \text{cte}$ sont planes et que le plan de chacune d'elles coupe S sous un angle constant.

10. — Toutes les ellipses tracées sur le conoïde de Plücker d'équation

$$z(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$$

ont la même distance focale.

11. — Montrer que l'intersecton des deux surfaces d'équations

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 2xyz; \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

est formée de quatre cercles.

12. — Trouver les droites tracées sur la surface d'équation

a) $x^2z^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$ *b*) $x^3 + y^3 + z^3 - a^3 = 0.$

13. — Trouver les droites de ia surface d'équation homogène

$$(x + y + z + t)^3 - (x^3 + y^3 + z^3 + t^3) = 0.$$

14. — Existe-t-ii une sphère tangente à toutes les droites Δ qui coupent orthogonaiement l'axe Oz et qui rencontrent la courbe C d'équatlons

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - ax = 0?$$

15. — On considère ia surface Σ d'équation

$$x \sin\frac{z}{a} - y \cos\frac{z}{a} = 0.$$

Nature. Lieu des points de Σ en lesquels ie plan tangent passe par ie point $(a, 0, 0)$.

16. — On considère l'une des surfaces S engendrées par ia droite G_u d'équations

$$\begin{cases} x = (a + z)\cos u \\ y = (a - z)\sin u \end{cases} \qquad \begin{cases} x = uz + u^2 \\ y = u^2z + u \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z\cos u + a\sin u \\ y = z\sin u + a\cos u. \end{cases}$$

Étudler la variation du plan tangent en un point M qul décrit G_u; iigne de striction. Contour apparent sur xOy.

17. — On donne les surfaces

a) $x^3 + xy + z = 0$; *b*) $x = u + v$; $y = u^2 + v^2$; $z = u^3 + v^3$;

trouver les génératrices rectilignes, la llgne de striction, et ie contour apparent sur xOy.

18. — Ligne de striction de la surface d'équatlon

$$x^2 - 4y^2 - az = 0.$$

19*. — Γ est une courbe donnée, dans un plan P. Δ(M) est une drolte normale en M à Γ, qui fait l'angie donné α avec celie des normales en M à Γ qui est située dans P. Montrer que, quand M décrit Γ, Δ(M) engendre une surface développable.

20. — Trouver les surfaces réglées développables dont toutes les génératrices rencontrent

a) une drolte fixe; *b*) un cercle fixe.

21. — Démontrer que ia surface dont ies équations paramétriques sont

$$x = a\frac{-vu^2 - 2u + v}{(u^2 + 1)^2} \qquad y = a\frac{u^2(u^2 - 2uv - 1)}{(u^2 + 1)^2}, \qquad z = av$$

est développabie et déterminer son arête de rebroussement.

22*. — Deux surfaces régiées S et S' ont en commun une génératrice G; étudier comment varie l'angle des plans tangents en un point M qui décrit G.

Si S et S' sont tangentes en trois points de G, elles sont tangentes en tout point de G; on dit qu'elies se raccordent le long de G.

Connaissant les plans tangents à S en trois points de G, utiliser une quadrique régiée qui se raccorde à S le long de G pour construire le plan tangent à S en un point quelconque de G.

En particulier, on peut trouver des paraboloïdes de raccordement le long de G. Appliquer au cas où S est engendrée par une droite assujettie à rencontrer une conique donnée C et deux droites D_1 et D_2 non coplanaires, ne rencontrant pas C.

23*. — Démontrer que ies plans représentés par l'équation :

$$2u^2x + 2uy + z = 4\varphi(u)$$

φ étant une fonction donnée, sont ies plans osculateurs à une hélice.

CHAPITRE IX

ENVELOPPES DANS L'ESPACE

Nous avons étudié au chapitre VIII les surfaces développables, enveloppes d'une famille de plans dépendant d'un paramètre, et nous avons étudié à quelle condition une famille de droites, dépendant d'un paramètre, est formée par les tangentes à une courbe de l'espace. Nous allons examiner quelques autres problèmes d'enveloppes dans l'espace; nous nous bornerons, pour chacun d'eux, à poser le problème et à en indiquer la solution, les raisonnements étant analogues à ceux qui ont été faits aux chapitres VII et VIII.

I. ENVELOPPES

103. ***Enveloppe d'une famille de courbes dépendant d'un paramètre.*** **— 1° Équations implicites.** — Soit C_λ la courbe commune aux deux surfaces

$$(1) \qquad f(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad (2) \quad g(x, y, z, \lambda) = 0$$

Existe-t-il sur C_λ un point M tel que, λ variant, ce point M dérive une courbe E tangente à chaque courbe C_λ au point M correspondant? Si E existe, elle est dite *enveloppe* des C_λ.

On montre que E n'existe que si le système des quatre équations (1), (2)

$$(3) \qquad f'_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0 \qquad (4) \quad g'_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0$$

admet au moins une solution, quel que soit λ

En général, ces quatre équations sont incompatibles, et les C_λ n'ont pas d'enveloppe.

Si les quatre équations admettent, quel que soit λ, la solution :

$$x = \varphi(\lambda), \qquad y = \theta(\lambda), \qquad z = \psi(\lambda),$$

le point M (φ, θ, ψ) décrit une courbe qui fait partie de l'enveloppe cherchée E.

Ce résultat, comme tous ceux qui nous énoncerons dans ce chapitre, est soumis à des réserves analogues à celles qui ont été formulées pour les enveloppes de courbes planes.

REMARQUE. — Si les courbes C_λ sont les intersections d'une surface Σ fixe $[f(x, y, z) = 0]$ et d'une surface variable $[g(x, y, z, \lambda) = 0]$, elles admettent en général une enveloppe située sur Σ et définie par

$$f = 0, \qquad g = 0, \qquad g'_\lambda = 0.$$

2° **Représentation paramétrique.** — On donne

$$(5) \qquad \overrightarrow{OM} = \vec{F}(u, v) \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

On appelle C_v la courbe définie par (5) lorsque v a une valeur fixée; u est, sur cette courbe, le paramètre de circulation.

On montre, comme pour la question analogue étudiée dans le plan au n° **78**, que s'il existe sur la surface Σ définie par (5) une courbe $\mathcal{L}$ de points où les vecteurs $\frac{\partial \vec{F}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{F}}{\partial v}$ soient colinéaires, non nuls, $\mathcal{L}$ est *enveloppe* des courbes C_v (et aussi des courbes Γ_u).

S'il existe sur Σ une courbe Λ en chaque point de laquelle $\frac{\partial \vec{F}}{\partial v}$ soit nul, Λ est *enveloppe* des courbes C_v.

Alors que dans le plan, on aboutissait à une seule relation entre u et v en exprimant que $\frac{\partial \vec{F}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{F}}{\partial v}$ étaient colinéaires, maintenant on obtient deux relations

$$\frac{f'_v}{f'_u} = \frac{g'_v}{g'_u} = \frac{h'_v}{h'_u}$$

et en général les courbes C_v n'ont pas d'enveloppe.

Rappelons que les points de Σ où les vecteurs $\frac{\partial \vec{F}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{F}}{\partial u}$ sont colinéaires sont des points non réguliers où l'existence du plan tangent n'est pas assurée.

REMARQUE. — Si on définit sur la surface Σ une famille de courbes K_λ par la relation

$$(6) \qquad \varphi(u, v, \lambda) = 0$$

les courbes K_λ ont une enveloppe engendrée par tout point M vérifiant simultanément (6) et (7) $\varphi'_\lambda(u, v, \lambda) = 0$.

3° **Enveloppe d'une droite.** — Prenons le cas particulier où la droite G_u variable est donnée par ses équations canoniques :

$$G_u \begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$$

a, b, p, q étant des fonctions de u définies sur un intervalle $\mathcal{C}$.

Peut-on trouver sur G_u un point particulier L, de cote $z = \varphi(u)$ tel que G_u soit la tangente en L à la courbe $\mathcal{L}$ décrite par ce point?

Soit P le point $(p, q, 0)$, $\vec{l}$ le vecteur $(a, b, 1)$

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OP} + \varphi \vec{l}$$

$$\frac{d\vec{L}}{du} = \frac{d\vec{P}}{du} + \varphi \cdot \frac{d\vec{l}}{du} + \frac{d\varphi}{du} \vec{l}.$$

Le vecteur $\frac{d\vec{P}}{du} + \varphi\frac{d\vec{l}}{du}$ est parallèle au plan xOy, auquel $\vec{l}$ n'est pas parallèle; $\frac{d\vec{L}}{du}$ ne peut avoir la direction de $\vec{l}$ que si

$$\frac{d\vec{P}}{du} + \varphi.\frac{d\vec{l}}{du} = \vec{0}, \qquad \forall u \in \mathcal{C}.$$

Les conditions simultanées

$$p' + \varphi a' = 0, \qquad q' + \varphi b' = 0$$

exigent

$$b'p' - a'q' = 0, \qquad \forall u \in \mathcal{C},$$

et on retrouve la condition du n° 93.

104. *Enveloppe d'une famille de surfaces.* — **1° Surfaces dépendant d'un paramètre.** — Soit

$$f(x, y, z, \lambda) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface S_λ dépendant du paramètre λ. Existe-t-il sur S_λ un point M tel que, λ variant, ce point M dérive une courbe E tangente à chaque surface S_λ au point M correspondant?

On montre que le problème n'est possible qu'à condition de choisir M sur la courbe C_λ intersection de S_λ et de

$$(S'_\lambda) \quad f'_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0. \tag{2}$$

Il existe donc une infinité de courbes E, toutes celles qui s'appuient sur les courbes C_λ représentées par les équations (1) et (2), et sont par suite situées sur la surface Σ engendrée par les C_λ.

La surface S_λ est tangente à Σ en tout point de C_λ; C_λ est appelée *courbe caractéristique* de S_λ, l'on dit que Σ est l'*enveloppe* des surfaces S_λ.

En éliminant λ entre (1) et (2), on obtient l'équation cartésienne de Σ.

REMARQUE. — Ces résultats généralisent ceux qui ont été obtenus au n° 92 pour l'enveloppe d'un plan variable dépendant d'un paramètre.

REMARQUE. — Les courbes C_λ, caractéristiques des S_λ, ont en général une enveloppe, engendrée par les points communs à C_λ et à la surface

$$(S''_\lambda) \qquad f''_{\lambda^2}(x, y, z, \lambda) = 0. \tag{3}$$

2° Surfaces dépendant de deux paramètres. — Soit

$$f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \tag{4}$$

l'équation d'une surface $S_{\lambda\mu}$ dépendant des deux paramètres λ et μ. Existe-t-il sur $S_{\lambda\mu}$ un point M tel que, λ et μ variant, M engendre une surface Σ tangente en chaque point M à la surface $S_{\lambda\mu}$ qui correspond à ce point? Si Σ existe, elle est dite *enveloppe* des surfaces $S_{\lambda\mu}$.

On montre que le problème n'est possible qu'à la condition de choisir M à l'intersection de $S_{\lambda\mu}$ et des surfaces

$$f'_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \qquad f'_\mu(x, y, z, \lambda, \mu) = 0. \tag{5}$$

Un point M de $S_{\lambda\mu}$ vérifiant les deux relations (5) est appelé *point caractéristique de* $S_{\lambda\mu}$.

En résolvant (4) et (5) par rapport à x, y, z on obtient une représentation paramétrique de Σ en fonction de λ et μ; en éliminant λ et μ entre (4) et (5), on obtient l'équation cartésienne de Σ.

REMARQUE. — On notera qu'au 1° la surface S_λ avait contact avec son enveloppe en tous les points d'une courbe caractéristique, tandis qu'au 2° la surface $S_{\lambda\mu}$ touche son enveloppe en des points isolés.

3° **Surfaces dépendant de trois paramètres liés par une relation.** — Soit

$$f(x, y, z, \lambda, \mu, \nu) = 0 \tag{6}$$

l'équation d'une surface S, λ, μ, ν étant liés par

$$\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0. \tag{7}$$

Les points caractéristiques de S vérifient

$$\frac{f'_\lambda}{\varphi'_\lambda} = \frac{f'_\mu}{\varphi'_\mu} = \frac{f'_\nu}{\varphi'_\nu}. \tag{8}$$

En particulier, pour passer de la représentation tangentielle d'une enveloppe

$$\Phi(u, v, w, r) = 0 \tag{9}$$

Φ étant une fonction homogène des coordonnées homogènes u, v, w, r d'un plan P variable, à sa représentation ponctuelle, on utilisera les coordonnées homogènes du point caractéristique de P :

$$\frac{x}{\Phi'_u} = \frac{y}{\Phi'_v} = \frac{z}{\Phi'_w} = \frac{t}{\Phi'_r}. \tag{10}$$

L'enveloppe représentée par (9) peut être une surface non développable, ou une courbe.

II* DUALITÉ EN GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

105. ***Étude d'une transformation par polaires réciproques.*** — Dans ce sous-chapitre, nous allons étendre à l'espace les résultats obtenus au n° **87**. Nous partons, cette fois, d'une espace affine réel $\mathcal{E}$, de dimension trois; nous désignons par $\mathfrak{L}$ la complétion projective de $\mathcal{E}$ et par $\mathfrak{L}^*$ l'espace projectif dual de $\mathfrak{L}$, considéré comme l'ensemble des plans de $\mathfrak{L}$. Nous rapportons $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$ à deux repères duaux, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$, déduits d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$.

Nous appelons élément de contact un élément $\{ M, \Pi \}$ de $\mathfrak{L} \times \mathfrak{L}^*$ tel que le point M est dans le plan Π; l'ensemble des éléments de contact est désigné par F.

1° **Définition d'une transformation.** — Considérons la bijection, f, de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{L}^*$ qui, au point M de coordonnées (a, b, c, d) associe le plan $m = f(M)$ de coordonnées (a, b, c, d). On vérifie comme au n° 87, 2° que, lorsque le point M décrit le plan P, le plan $f(M)$ pivote autour du point $f^{-1}(P)$. On peut d'ailleurs considérer f comme la restriction à $\mathfrak{L}$ de la corrélation polaire qui, au point générique du complexifié de $\mathfrak{L}$, associe son *plan polaire* (1) par rapport à la quadrique propre $\mathfrak{K}$, dont une équation est : $X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0$ quand on rapporte le complexifié au repère $\mathfrak{R}$.

Nous désignons par $\mathfrak{C}$ la restriction à F de la transformation par polaires réciproques de quadrique directrice $\mathfrak{K}$, c'est-à-dire l'application involutive de F sur F déterminée par

$$\{ M, \Pi \} \xrightarrow{\mathfrak{C}} \{ f^{-1}(\Pi), f(M) \}$$

2° **Transformée d'une droite D.** — Les points M de D sont transformés par f en les plans d'un faisceau linéaire; soit d la droite commune à ces plans $f(M)$. Un point ϖ de d étant commun à tous les plans $f(M)$, le plan $f^{-1}(\varpi)$ contient chacun des points M et, par suite, il contient D. Chacune des droites D et d est à la fois le lieu des transformés par f^{-1} des plans qui contiennent l'autre, et l'enveloppe des transformés par f des points de l'autre. Nous traduirons ce résultat par : $d = \mathfrak{C}(D)$ et $D = \mathfrak{C}(d)$.

(Dans la théorie des quadriques, on dit que d et D sont *droites conjuguées* par rapport à $\mathfrak{K}$).

3° Nous nous en tiendrons dans les n^{os} **106** et **107** à des raisonnements analytiques, mais on pourrait naturellement étendre les résultats obtenus par voie géométrique au n° 87, 3°.

106. ***Transformée d'une courbe par polaires réciproques.*** — **1° Cas d'une courbe gauche.** La donnée d'une courbe gauche C équivaut à celle de la surface développable ρ dont la courbe donnée est l'arête de rebroussement. Cette donnée implique celle de deux ensembles :

a) la partie Γ_p de $\mathfrak{L}$ formée par les points de la courbe C, qui sont aussi les points caractéristiques des droites caractéristiques des plans tangents à la surface ρ;

b) la partie Γ_ω de $\mathfrak{L}^*$ formée par les plans tangents à la surface ρ qui sont aussi les plans osculateurs à la courbe C.

Cela conduit à considérer la partie Γ de F formée des éléments de contact $\{ M, \Pi \}$ tels que Π est le plan osculateur au point M de la courbe C et M le point caractéristique de la droite caractéristique du plan Π tangent à la surface ρ.

La donnée de l'un des ensembles Γ_p ou Γ_ω entraîne la détermination de l'autre et aussi celle de Γ, par application des résultats suivants, que nous empruntons, pour la colonne de gauche au n° 97, 3° du tome III et pour celle de droite au n° 92, 4° du présent tome IV.

Lorsque le point M	Lorsque le plan m
de coordonnées homogènes : $A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda), D(\lambda)$ (1)	
engendre Γ_p, le plan Π osculateur en M à Γ_p, qui contient M et les point M′, M″	engendre γ_ω, le point ϖ, caractéristique de la droite caractéristique de m, qui est dans m et dans les plans m', m''
de coordonnées homogènes $\begin{cases} A'(\lambda), B'(\lambda), C'(\lambda), D'(\lambda) & (2) \\ A''(\lambda), B''(\lambda), C''(\lambda), D''(\lambda) & (3) \end{cases}$	
engendre Γ_ω.	engendre γ_p.

(1) La notion de points conjugués s'étend sans difficulté d'une conique à une quadrique.

On en déduit, en utilisant $m = f(M)$ et $\varpi = f^{-1}(\Pi)$ et en raisonnant comme au n° 87, 2° que les ensembles d'éléments de contact considérés

Γ (colonne de gauche)	γ (colonne de droite)

se correspondent de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_\omega = f(\Gamma_p); \quad \gamma_p = f^{-1}(\Gamma_\omega); \quad \gamma = \mathfrak{T}(\Gamma) \\ \Gamma_\omega = f(\gamma_p); \quad \Gamma_p = f^{-1}(\gamma_\omega); \quad \Gamma = \mathfrak{T}(\gamma). \end{array}\right.$$

Les systèmes de coordonnées (1) et (2) fournissent : dans la colonne de gauche, la tangente T au point M de Γ_p; dans la colonne de droite, la droite caractéristique t du plan m de γ_ω. Étant donné que t est l'intersection des transformés par f de deux points de T on a, d'après le 105, 2° : $t = \mathfrak{T}(T)$ et $T = \mathfrak{T}(t)$.

Finalement chacune des « courbes-surfaces développables » γ et Γ (comprise au sens d'ensemble d'éléments de contact) est l'homologue de l'autre dans la transformation par polaires réciproques $\mathfrak{T}$; celle-ci échange en outre les « tangentes-droites caractéristiques » de Γ et celles de γ.

2° **Cas d'une courbe plane.** — Reprenons l'étude du 1° en supposant que les fonctions A, B, C, D de λ ne sont pas linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il existe quatre constantes a, b, c, d telles que

$$\forall \lambda, \quad a\mathrm{A}(\lambda) + b\mathrm{B}(\lambda) + c\mathrm{C}(\lambda) + d\mathrm{D}(\lambda) = 0$$

et désignons par :

Π_0 le plan de coordonnées (a, b, c, d)	ϖ_0 le point de coordonnées (a, b, c, d)

Dans ce cas :

Γ_p est l'ensemble des points M d'une courbe située dans le plan Π_0, T est la tangente en M, Γ_ω est réduit au plan Π_0	γ_ω est l'ensemble des plans tangents m à un cône de sommet ϖ_0, t est la génératrice de contact de m, γ_p est réduit au point ϖ_0.

Les relations :

$$\gamma = \mathfrak{T}(\Gamma), \qquad \Gamma = \mathfrak{T}(\gamma), \qquad t = \mathfrak{T}(T), \qquad T = \mathfrak{T}(t)$$

restent vraies à condition de considérer que l'on désigne

a) par Γ l'ensemble des éléments de contact de la forme $\{ M, \Pi_0 \}$ avec $M \in \Gamma_p$ (courbe plane),

b) par γ l'ensemble des éléments de contact de la forme $\{ \varpi_0, m \}$ avec $m \in \gamma_\omega$ (cône).

Dans ce cas la transformation $\mathfrak{T}$ échange la « courbe plane » Γ et le « cône » γ; elle échange en outre les tangentes à Γ et les génératrices de γ.

107. ***Transformée par polaires réciproques d'une surface non développable.*** — La donnée d'une surface non développable implique la donnée de deux ensembles :

a) la partie S_p de $\mathfrak{L}$ formée par les points de la surface;

b) la partie S_ω de $\mathfrak{L}^*$ formée par les plans tangents à la surface.

La surface peut donc être considérée comme la partie, S, de F qui est constituée par les éléments de contact $\{ M, \Pi \}$ tels que Π est le plan tangent en M et M le point caractéristique (ou point de contact) de Π. Ici l'élément de contact $\{ M, \Pi \}$ dépend de deux paramètres indépendants.

La donnée de l'un des ensembles, S_p ou S_ω entraîne la possibilité de déterminer l'autre par application des résultats suivants que le lecteur déduira, pour la colonne de gauche du

n° 89, 2° et pour celle de droite du n° 104, 2°; la notation est légèrement modifiée dans la colonne de droite où l'on a utilisé les lettres minuscules.

Lorsque le point M	Lorsque le plan m
de coordonnées homogènes :	$A(\lambda, \mu), B(\lambda, \mu), C(\lambda, \mu), 1$
engendre S_p, le plan tangent en M, H, qui contient M et les points M'_λ, M'_μ	engendre s_ω, le point caractéristique ϖ de m, qui est dans m et dans les plans m'_λ, m'_μ
de coordonnées homogènes	$\left\{\begin{array}{l} A'_\lambda, B'_\lambda, C'_\lambda, 0 \\ A'_\mu, B'_\mu, C'_\mu, 0 \end{array}\right.$
engendre S_ω	engendre s_p

On en déduit, en utilisant $m = f(M)$ et $\varpi = f^{-1}(H)$, que les ensembles d'éléments de contact considérés

S (colonne de gauche)	s (colonne de droite)

se correspondent de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lll} s_\omega = f(S_p); & s_p = f^{-1}(S_\omega); & s = \mathfrak{T}(S) \\ S_\omega = f(s_p); & S_p = f^{-1}(s_\omega); & S = \mathfrak{T}(s). \end{array}\right.$$

Nous dirons que chacune des « surfaces » s et S (comprise au sens d'ensemble d'éléments de contact) est la transformée de l'autre dans la transformation par polaires réciproques $\mathfrak{T}$.

EXERCICES

1. — On considère les droites D représentées par les équations

$$x = uz - v, \qquad y = vz - \frac{u^3}{3}$$

u, v étant deux paramètres (on dit que les droites dépendant de deux paramètres constituent une *congruence*). Combien de droites D réelles peut-on mener par un point donné?

Trouver les fonctions $\varphi(u)$ telles que les droites D pour lesquelles $v = \varphi(u)$ soient les génératrices d'une surface développable; trouver l'arête de rebroussement de cette surface.

2. — Les droites

$$(D) \qquad \frac{x - u\sin v}{\sin v} = \frac{y - u\sin v}{-\cos v} = \frac{az}{u}$$

ont-elles une enveloppe?

Déterminer M sur (D), tel que la tangente en M au lieu de M soit D.

3. — On donne un repère orthonormé $Oxyz$; on définit A sur Ox, B sur Oy, C sur Oz par les égalités $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$.

Trouver l'enveloppe du plan ABC quand a, b, c varient de façon que

α) $\qquad a^n + b^n + c^n = k^n \qquad (n = 1, 2) \qquad (k$ donné)

β) $\qquad$ aire ABC $= l^2 \qquad (l$ donné).

Trouver l'enveloppe de la sphère OABC, et celle de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ dans l'hypothèse (α).

4. — Un point M décrit le cercle représenté par les équations

$$x = 0, \qquad y^2 + z^2 - R^2 = 0 \qquad \text{(repère orthonormé).}$$

Trouver l'enveloppe des sphères pour lesquelles le point M et le point A(0, 0, 0) sont diamétralement opposés.

5. — Enveloppe des sphères qui ont leur centre sur la surface $x^2 + y^2 = 2pz$ et sont orthogonales à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - pz - \frac{3p^2}{4} = 0$ (repère orthonormé).

6. — Enveloppe des sphères qui ont leur centre sur la courbe

$$z = 0, \qquad y^2 - 2px = 0 \qquad \text{(repère orthonormé)}$$

et sont tangentes au plan $x = h$.

7. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, un cercle C(O, R) dans le plan xOy et la parallèle D à Oy menée par A $(-a, 0, 0)$. Un cercle γ dont le centre se déplace sur C reste tangent à D. Soit E la courbe qui forme avec D l'enveloppe des cercles γ. Trouver la courbe E et construire sa développée. Pourquoi cette développée ne dépend-elle pas de a?

Soit E_a la courbe qui est située dans le plan dont l'équation est $z = a$ et se projette orthogonalement sur le plan xOy suivant F; quand a varie E_a engendre une surface réglée S. Sur chaque génératrice G de S il existe un point A qui est point de rebroussement pour la courbe E_a qui y passe. Trouver le lieu géométrique H de A, la tangente en A à ce lieu et la surface de révolution engendrée par H en tournant autour de Oz.

CHAPITRE X

LONGUEUR D'UN ARC. COURBURE. TORSION

I. LONGUEUR D'UN ARC

108. *Ligne polygonale inscrite dans un arc orienté.* — 1° Rappels.

Dans l'espace affine $\mathcal{E}$ (de dimension 2 ou 3) associé à l'espace vectoriel réel $\vec{\mathcal{E}}$, nous nous donnons un arc simple orienté, continu, Γ. Rappelons (II, 2°) que Γ est l'image d'un arc géométrique orienté $\mathcal{A}$ dont les paramétrages admissibles sont des applications injectives continues. L'un de ces paramétrages, que nous écrirons

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u), \qquad u \in [a, b]$$

a été choisi pour définir Γ.

Nous désignons par A et B l'origine et l'extrémité de Γ, ce qui permet d'écrire $\overset{\frown}{AB}$ pour Γ, et nous supposons que la notation a été choisie de telle sorte que $\overrightarrow{OA} = \vec{F}(a)$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{F}(b)$, sans que nécessairement on ait $a < b$. **L'orientation est dite conforme au sens des u croissants [resp. décroissants] si $a < b$ [resp. $a > b$]; M′ et M″ étant définis par $\overrightarrow{OM'} = \vec{F}(u')$, $\overrightarrow{OM''} = \vec{F}(u'')$, on dit que M′ est avant M″ si les différences $u'' - u'$ et $b - a$ ont le même signe.**

Nous supposerons que $\vec{\mathcal{E}}$ (et par suite $\mathcal{E}$) a été muni d'une structure euclidienne, mais la théorie que nous allons développer au sous-chapitre I s'applique encore si $\mathcal{E}$ n'est pas euclidien, la longueur du segment AB étant alors remplacée par la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le choix de la norme sur $\vec{\mathcal{E}}$ étant indifférent.

2° DÉFINITION. — **On appelle ligne polygonale inscrite dans l'arc simple continu orienté Γ, d'origine A et d'extrémité B, toute ligne brisée P dont les sommets $M_0, M_1, \ldots M_n$ sont des points de $\overset{\frown}{AB}$ tels que :**

$$M_{i-1} \text{ est avant } M_i \ (i = 1, 2, \ldots, n); \quad M_0 = A; \quad M_n = B.$$

Il s'agit là d'une notion intrinsèque.

A la ligne polygonale P inscrite dans $\overset{\frown}{AB}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u)$ fait correspondre biunivoquement la subdivision (d) de $[a, b]$ par la suite monotone

$$u_0, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, \ldots, u_n; \quad u_0 = a; \quad u_n = b.$$

Le nombre $\sup |u_i - u_{i-1}|$ est appelé *module* de la subdivision (d).

3° **Longueur de la ligne polygonale** P. — Par définition, la longueur de la ligne polygonale P inscrite dans Γ, est la somme, $l(P)$, des longueurs des segments de droites dont la réunion constitue P. Dans le cas de la ligne définie au 2°, on a :

$$l(P) = AM_1 + M_1M_2 + \ldots + M_{i-1}M_i + \ldots + M_{n-1}B.$$

109. *Première définition d'un arc rectifiable.* — 1° Proposons-nous d'étudier l'ensemble $\mathfrak{L}$ des longueurs $l(P)$ de toutes les lignes polygonales inscrites dans un arc simple continu orienté donné, Γ, d'origine A et d'extrémité B.

$\mathfrak{L}$ admet un élément minimal, AB. En effet, M étant un point quelconque de $\overset{\frown}{AB}$, nous avons (inégalité triangulaire)

$$AB \leqslant AM + MB.$$

$\mathfrak{L}$ n'admet pas d'élément maximal (si on excepte le cas où Γ est une réunion de segments de droites). En effet, dès qu'on ajoute M_i' entre M_{i-1} et M_i dans la suite rangée de points qui définit P, on obtient une nouvelle ligne polygonale, P*, telle que

$$l(P) \leqslant l(P^*),$$

l'inégalité étant stricte si le point M_i' n'appartient pas au segment de droite $M_{i-1}M_i$. Nous sommes ainsi conduits à poser la définition suivante :

DÉFINITION I. — **Un arc simple continu est dit rectifiable si l'ensemble des longueurs de toutes les lignes polygonales inscrites dans l'arc est majoré.**

Rappelons (II, 11, 2°) qu'un ensemble majoré admet une borne supérieure; nous ajouterons :

DÉFINITION II. — **On appelle longueur d'un arc rectifiable la borne supérieure de l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans l'arc.**

La longueur de l'arc rectifiable Γ est notée $L(\Gamma)$. Quand on précise l'origine A et l'extrémité B de cet arc, on écrit indifféremment $L(\overset{\frown}{AB})$ ou arc AB.

REMARQUE. — Les notions d'arc rectifiable et de longueur d'un arc sont indépendantes du choix de la représentation paramétrique et même de l'orientation; on a

$$L(\overset{\frown}{AB}) = L(\overset{\frown}{BA}).$$

2° **Additivité de la longueur.** — Elle résulte des trois propositions suivantes. THÉORÈME I. — **Tout sous-arc d'un arc rectifiable est lui-même rectifiable.**

Soit $\overset{\frown}{A'B'}$ un sous-arc (10) de l'arc rectifiable $\overset{\frown}{AB}$. Quelle que soit la ligne polygonale P′ inscrite dans $\overset{\frown}{A'B'}$, il suffit de lui adjoindre les deux segments de droite [AA′] et [B′B] pour obtenir une ligne polygonale inscrite dans $\overset{\frown}{AB}$, ligne dont la longueur n'excède pas $L(\overset{\frown}{AB})$.

L'ensemble $\mathfrak{L}'$ des longueurs des lignes polygonales inscrites dans $\overset{\frown}{A'B'}$ admet le majorant

$$L(\overset{\frown}{AB}) - AA' - B'B.$$

L'arc $\overset{\frown}{A'B'}$ est donc rectifiable.

THÉORÈME II. — **Si un arc simple continu est la réunion de deux arcs rectifiables, il est lui-même rectifiable.**

Soit $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \cup \overset{\frown}{CB}$, $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{CB}$ étant des arcs rectifiables.

Quelle que soit la ligne polygonale P inscrite dans $\overset{\frown}{AB}$, il suffit d'adjoindre le point C pour obtenir $P^* = P' \cup P''$ inscrite dans $\overset{\frown}{AB}$, P′ et P″ étant respectivement inscrites dans $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{CB}$. On a

$$l(P) \leqslant l(P^*) = l(P') + l(P'')$$
$$l(P') \leqslant L(\overset{\frown}{AC}); \qquad l(P'') \leqslant L(\overset{\frown}{CB}).$$

On en déduit

$$l(P) \leqslant L(\overset{\frown}{AC}) + L(\overset{\frown}{CB}).$$

L'ensemble $\mathfrak{L}$ des longueurs $l(P)$ est majoré : $\overset{\frown}{AB}$ est rectifiable.

THÉORÈME III. — **Si $\overset{\frown}{AB}$ est un arc rectifiable et C un point quelconque de cet arc, les longueurs des arcs rectifiables $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CB}$ sont liées par**

$$L(\overset{\frown}{AB}) = L(\overset{\frown}{AC}) + L(\overset{\frown}{CB}). \tag{1}$$

De la démonstration du théorème II, résulte

$$L(\overset{\frown}{AB}) \leqslant L(\overset{\frown}{AC}) + L(\overset{\frown}{CB}). \tag{2}$$

Raisonnons par l'absurde et supposons (hypothèse H) :

$$L(\overset{\frown}{AC}) + L(\overset{\frown}{CB}) = L(\overset{\frown}{AB}) + 2h, \quad h > 0 \text{ (strictement).} \tag{3}$$

D'après la définition de la borne supérieure, il existe deux lignes polygonales P'_0 et P''_0 respectivement inscrites dans $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{CB}$, telles que

$$l(P'_0) > L(\overset{\frown}{AC}) - h; \qquad l(P''_0) > L(\overset{\frown}{CB}) - h.$$

La réunion $P_0 = P_0' \cup P_0''$ est une ligne polygonale inscrite dans $\overset{\frown}{AB}$ telle que

$$l(P_0) > L\left(\overset{\frown}{AC}\right) - h + L\left(\overset{\frown}{CB}\right) - h,$$

ce qui, compte tenu de (3), s'écrit

$$l(P_0) > L\left(\overset{\frown}{AB}\right).$$

L'hypothèse H conduit ainsi à une contradiction. La relation (2) ne peut donc prendre que la forme (1).

110. *Une classe d'arcs rectifiables.* 1° THÉORÈME. — **Tout arc simple continûment dérivable est rectifiable et si**

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u), \qquad u \in [a, b], \qquad a < b, \tag{1}$$

est une représentation continûment dérivable d'un tel arc, $\overset{\frown}{AB}$, on a

$$L\left(\overset{\frown}{AB}\right) = \int_a^b \left\| \vec{F}'(u) \right\| du. \tag{2}$$

La démonstration de ce théorème comprend deux parties.

I. *Existence de la longueur de l'arc.* — Nous partons de l'arc continûment dérivable défini par (1) et nous convenons de l'orienter dans le sens des u croissants : l'origine est définie par $\overrightarrow{OA} = \vec{F}(a)$, l'extrémité par $\overrightarrow{OB} = \vec{F}(b)$. Soit P l'une quelconque des lignes polygonales inscrites dans $\overset{\frown}{AB}$. Elle est définie par

$$\overrightarrow{OM_i} = \vec{F}(u_i), \ (i = 0, 1, \ldots, n); \quad u_{i-1} < u_i; \quad \overrightarrow{OA} = \vec{F}(u_0); \quad \overrightarrow{OB} = \vec{F}(u_n).$$

La fonction vectorielle $\vec{F}'$ de la variable réelle étant continue sur $[u_{i-1}, u_i]$, nous pouvons l'intégrer sur ce segment (n° 7, 4°) :

$$\vec{F}(u_i) - \vec{F}(u_{i-1}) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OM_{i-1}} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \int_{u_{i-1}}^{u_i} \vec{F}'(u)\, du.$$

Tenant compte de la majoration de la longueur d'un vecteur défini par une intégrale vectorielle obtenue au n° 7, 4°, nous en déduisons

$$M_{i-1}M_i \leqslant \int_{u_{i-1}}^{u_i} \left\| \vec{F}'(u) \right\| du \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En ajoutant membre à membre les n égalités précédentes nous obtenons

$$l(P) \leqslant \int_a^b \left\| \vec{F}'(u) \right\| du. \tag{3}$$

L'ensemble $\mathfrak{L}$ des longueurs $l(P)$ est donc majoré : $\overset{\frown}{AB}$ est rectifiable.

En outre $$L\left(\overset{\frown}{AB}\right) \leqslant \int_a^b \left\| \vec{F}'(u) \right\| du.$$

II. *Calcul de la longueur de l'arc.* — Si M (u) est un point quelconque de $\overset{\frown}{AB}$, le sous-arc $\overset{\frown}{AM}$ de l'arc rectifiable $\overset{\frown}{AB}$ est lui-même rectifiable (**109**,2°). Nous disposons ainsi d'une fonction réelle σ de la variable réelle u définie sur $[a, b]$ par

$$\sigma(u) = L\left(\overset{\frown}{AM}\right).$$

Cette fonction est strictement croissante. En effet si M (u) et $M_1(u + h)$ sont deux points quelconques de $\overset{\frown}{AB}$, nous avons, d'après l'additivité de la longueur d'un arc,

$$\sigma(u + h) - \sigma(u) = \begin{cases} L\left(\overset{\frown}{MM_1}\right) & \text{si} \quad h > 0 \\ -L\left(\overset{\frown}{M_1M}\right) & \text{si} \quad h < 0 \end{cases}$$

et, dans les deux cas,

$$\operatorname{sgn}\left[\sigma(u + h) - \sigma(u)\right] = \operatorname{sgn} h.$$

Nous allons maintenant démontrer que la fonction σ est dérivable en tout point u de $[a, b]$ et nous allons calculer sa dérivée.

M(u) et $M_1(u + h)$ sont ici, respectivement, un point donné et un point arbitraire de $\overset{\frown}{AB}$. En tenant compte d'une part de la formule (3), d'autre part de la minoration de la longueur de l'arc par celle de la corde, nous avons, en distinguant deux cas suivant le signe de h,

$$MM_1 \leqslant \sigma(u + h) - \sigma(u) \leqslant \int_u^{u+h} \left\| \vec{F}'(t) \right\| dt \qquad \text{si } h > 0,$$

$$MM_1 \leqslant \sigma(u) - \sigma(u + h) \leqslant \int_{u+h}^{u} \left\| \vec{F}'(t) \right\| dt \qquad \text{si } h < 0.$$

Après multiplication par $\frac{1}{h}$ si $h > 0$, par $-\frac{1}{h}$ si $h < 0$ (c'est-à-dire dans les deux cas par un nombre positif), nous en déduisons les inégalités

$$\left\| \frac{\vec{F}(u + h) - \vec{F}(u)}{h} \right\| \leqslant \frac{\sigma(u + h) - \sigma(u)}{h} \leqslant \frac{1}{h} \int_u^{u+h} \left\| \vec{F}'(t) \right\| dt, \quad \forall h \neq 0. \quad (4)$$

Or la dérivabilité de la fonction vectorielle $\vec{F}$ au point u s'exprime par

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{F}(u + h) - \vec{F}(u)}{h} = \vec{F}'(u);$$

le premier membre de (4) admet donc la limite $\left\| \vec{F}'(u) \right\|$.

Par ailleurs, d'après l'étude de l'intégrale simple considérée comme fonction de sa borne supérieure,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_u^{u+h} \left\| \vec{F}'(t) \right\| dt = \left\| \vec{F}'(u) \right\|.$$

Il en résulte

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sigma(u+h) - \sigma(u)}{h} = \left\| \vec{F}'(u) \right\|,$$

ce qui prouve que la fonction σ admet, au point u de $[a, b]$, la dérivée

$$\sigma'(u) = \left\| \vec{F}'(u) \right\|.$$

Tenant compte de $\sigma(a) = 0$, on peut écrire

$$\sigma(u) = \int_a^u \left\| \vec{F}'(\theta) \right\| d\theta, \qquad \forall\, u \in [a, b].$$

En particulier, étant donné que $\sigma(b) = L(\widehat{AB})$, on obtient, pour $u = b$,

$$L(\widehat{AB}) = \int_a^b \left\| \vec{F}'(u) \right\| du,$$

qui n'est autre que la relation (2) de l'énoncé du théorème.

REMARQUE. — [0, L] étant l'image de $[a, b]$ par la fonction σ, continue et strictement monotone, on peut définir une fonction inverse σ^{-1} qui applique [0, L] sur $[a, b]$; σ^{-1} est continue et strictement monotone.

Si L' est un nombre quelconque de [0, L], il existe donc un point M' de l'arc $\widehat{AB}$ et un seul tel que $L(\widehat{AM'}) = L'$.

2° **Équivalence de l'arc et de la corde.** — Si $M(u)$ et $M_1(u + h)$ sont respectivement un point fixe et un point variable de l'arc continûment dérivable $\widehat{AB}$ défini par $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u)$, nous avons montré au 1°

$$\lim_{h \to 0} \frac{\text{corde } MM_1}{|h|} = \left\| \vec{F}'(u) \right\| \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\text{arc } MM_1}{|h|} = \left\| \vec{F}'(u) \right\|.$$

Si $\vec{F}'(u) \neq \vec{0}$, on en déduit : $\lim_{h \to 0} \frac{\text{arc } MM_1}{\text{corde } MM_1} = 1$, autrement dit :

THÉORÈME. — *Si* M *n'est pas un point stationnaire de* $\widehat{AB}$, *arc* MM_1 *et corde* MM_1 *sont, quand* M_1 *tend vers* M, *des infiniment petits équivalents.*

La partie principale commune de ces infiniment petits est $\left\| \vec{F}'(u) \right\| . |h|$.

3° **Généralisations.** — *a*) Tout ce qui a été dit pour un arc simple vaut pour une courbe fermée simple.

b) Si un arc simple continu Γ est continûment dérivable, à l'exception d'un nombre fini de points où il admet une dérivée continue à droite et une dérivée continue à gauche (points anguleux), Γ peut être considéré comme la réunion d'arcs rectifiables : il est donc rectifiable.

c) L'image Γ d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue $\vec{F}$ n'est pas toujours un arc simple, $\vec{F}$ pouvant ne pas être biunivoque (points multiples, représentations impropres, ...). Si Γ peut être considéré comme la réunion d'un nombre fini d'arcs simples rectifiables Γ_k, tels que l'origine de Γ_{j+1} coïncide avec l'extrémité de Γ_j, la somme des longueurs de ces arcs est (d'après l'additivité de la longueur) indépendante du mode de décomposition; cette somme est, par définition, la longueur de Γ.

4° Suites et limites sur un arc simple orienté continûment dérivable. — On peut étendre à un arc simple orienté Γ, continûment dérivable, certaines notions rencontrées sur la droite réelle, le point $M \in \Gamma$ remplaçant le point $x \in R$.

a) Grâce à la notion d'ordre, introduite sur Γ au n° 10, 4°, on peut considérer des sous-arcs fermés ou ouverts, la droite ou la gauche d'un point, des voisinages, des ensembles de points bornés, des points d'accumulation.

b) L'équivalence entre l'arc et la corde permet de préciser la notion de limite d'une suite de points M_n de Γ. Q étant un point de Γ, on note, par définition (cf. n° 2, 3°),

$$\lim_{n\to\infty} M_n = Q \qquad \text{si} \qquad \lim_{n\to\infty} \left\| \overrightarrow{QM_n} \right\| = 0;$$

on peut donc, comme conséquence du 2°, écrire

$$\lim_{n\to\infty} M_n = Q \iff \lim_{n\to\infty} L\left(\overset{\frown}{QM_n}\right) = 0.$$

On peut alors parler de continuité à propos d'une application de Γ dans R et réciproquement.

III. ***Seconde définition d'un arc rectifiable.*** — 1° DÉFINITION. — **Soit $\overset{\frown}{AB}$ un arc simple continu, orienté, défini par**

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u), \qquad u \in [a, b]. \tag{1}$$

A toute subdivision (*d*) de $[a, b]$ en *n* sous-segments $[u_{i-1}, u_i]$ correspond biunivoquement une ligne polygonale P inscrite dans $\overset{\frown}{AB}$, de sommets M_i, avec $\overrightarrow{OM_i} = \vec{F}(u_i)$; $l(P)$ désigne la longueur de P.

On dit que l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est rectifiable s'il existe un nombre L limite commune de toute longueur $l(P)$ quand le *module* de la subdivision (*d*) tend vers 0, ce qui signifie que

$$\forall \varepsilon > \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \sup |u_i - u_{i-1}| < \alpha \implies |l(P) - L| < \varepsilon. \tag{2}$$

Le nombre L est appelé longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$; on l'écrit $L\left(\overset{\frown}{AB}\right)$ (ou arc AB).

Cette définition semble dépendre de la représentation paramétrique choisie pour l'arc. En fait elle est intrinsèque car si on passe de la représentation (1) à la représentation également continue

$$\overrightarrow{OM} = \vec{\Phi}(t), \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

on définit une fonction $t = \varphi(u)$ strictement monotone, continue et par suite uniformément continue sur $[a, b]$; les clauses

$$\sup |u_i - u_{i-1}| \text{ tend vers } 0 \qquad \text{et} \qquad \sup |t_j - t_{j-1}| \text{ tend vers } 0$$

sont, de ce fait, équivalentes.

2° Équivalence des deux définitions d'un arc rectifiable (1).

THÉORÈME I. — **Si l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est rectifiable et a pour longueur L, au sens de la deuxième définition, il est rectifiable et a pour longueur L au sens de la première définition.**

*Soit $\overset{\frown}{AB}$ un arc rectifiable au sens de la seconde définition, soit L sa longueur.

Démontrons d'abord par l'absurde que L est un majorant pour l'ensemble $\mathcal{L}$ des longueurs $l(P)$ des lignes polygonales inscrites dans $\overset{\frown}{AB}$. Supposons en effet (hypothèse H), qu'il existe une ligne polygonale P_0 telle que $l(P_0) > L$. Écrivons

$$l(P_0) = L + \varepsilon_0, \qquad \varepsilon_0 > 0.$$

A ε_0 correspond α_0 tel que

$$\sup |u_i - u_{i-1}| < \alpha_0 \implies |l(P) - L| < \varepsilon_0.$$

Soit P_1 l'une quelconque des lignes polygonales qui vérifient

$$\sup |u_i - u_{i-1}| < \alpha_0. \tag{3}$$

La ligne P^* qui utilise tous les sommets de P_0 et P_1 vérifie *a fortiori* (3). On a donc

$$\left.\begin{array}{l} l(P_0) < l(P^*) \\ l(P^*) < L + \varepsilon_0 \end{array}\right\} \implies l(P_0) < L + \varepsilon_0,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse H. Celle-ci est absurde et

$$l(P) < L, \qquad \forall P.$$

L est ainsi un majorant pour $\mathcal{L}$. Mieux, L est bonne supérieure de $\mathcal{L}$; en effet, d'après la seconde définition de la longueur d'un arc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P \text{ telle que } l(P) > L - \varepsilon.$$

L est donc la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, au sens de la premlère définition.

THÉORÈME II. — **Si l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est rectifiable et a pour longueur L au sens de la première définition, il est rectifiable et a pour longueur L au sens de la deuxième définition.**

*Par hypothèse, l'ensemble $\mathcal{L}$ des longueurs $l(P)$ admet la borne supérieure L; si ε est un nombre positif arbitraire, il existe une ligne polygonale P_0 inscrite dans $\overset{\frown}{AB}$ et qui vérifie

$$l(P_0) > L - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

P_0 est formé de n segments; ses sommets sont déterminés par

$$\overrightarrow{OM_k} = \vec{F}(u_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

---

(1). Le lecteur pourra réserver pour une deuxième lecture les démonstrations des deux théorèmes qui suivent.

La fonction vectorielle $\vec{F}$ étant continue, et par suite uniformément continue sur $[a, b]$, au nombre donné $\frac{\varepsilon}{4n}$ on peut faire correspondre un nombre positif α tel que

$$|u' - u''| < \alpha \implies \left\| \vec{F}(u') - \vec{F}(u'') \right\| < \frac{\varepsilon}{4n} \quad \text{ou} \quad M'M'' < \frac{\varepsilon}{4n}.$$

Soit P' l'une quelconque des lignes polygonales inscrites dans $\overset{\frown}{AB}$ [de sommets M'_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ $\overrightarrow{OM'_i} = \vec{F}(u'_i)$] et qui vérifient $\sup |u'_i - u'_{i-1}| < \alpha$.

Nous savons déjà que $l(P') \leqslant L$; nous allons montrer que $l(P') > L - \varepsilon$. (5)

M_{k-1} et M_k désignant deux sommets consécutifs de P_0, l'arc $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ (extrémités comprises) contient zéro, un, ou plusieurs sommets de P'. Bornons-nous à ce dernier cas, et soient M'_i, M'_{i+1}, ..., M'_{j-1}, M'_j les sommets de P' appartenant à $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$; soit λ_k la longueur de la portion de P' qui commence à M'_i et finit à M'_j (*fig.* 108).

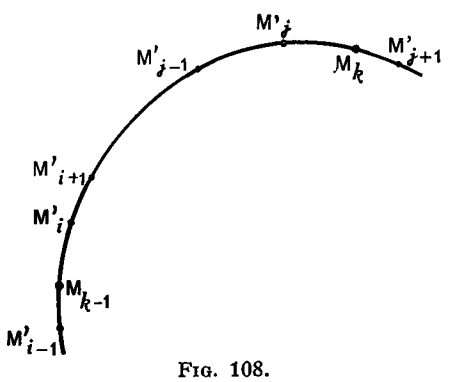


FIG. 108.

L'inégalité triangulaire donne

$$M_{k-1}M_k \leqslant M_{k-1}M'_i + \lambda_k + M'_jM_k.$$

Or $M_{k-1}M'_i < \frac{\varepsilon}{4n}$, $M'_jM_k < \frac{\varepsilon}{4n}$,

par suite

$$M_{k-1}M_k < \frac{\varepsilon}{2n} + \lambda_k.$$

La relation précédente est encore vraie (avec $\lambda_k = 0$) si l'arc $M_{k-1}M_k$ contient moins de deux sommets de P'.

En ajoutant membre à membre toutes les relations analogues pour $k = 1, 2, \ldots, n$, on obtient

$$l(P_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k;$$

or

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \leqslant l(P'), \qquad \text{et par suite}$$

$$l(P') > l(P_0) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

La relation (5) résulte enfin, par addition, des relations (4) et (6).

L est donc la longueur de $\overset{\frown}{AB}$ au sens de la deuxième définition.

112. ***Une application à l'étude de domaines quarrables du plan.*** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Si un arc simple continu du plan est rectifiable on peut l'enfermer dans un domaine polygonal dont l'aire est aussi petite que l'on veut; on dit qu'un tel arc est un ensemble d'aire nulle.**

Soit n un entier arbitraire, partageons l'arc simple continu considéré, Γ, en $2n$ arcs $A_{i-1}A_i$ de longueur commune $\frac{L}{2n}$ et quadrillons le plan en carrés dont les côtés, de longueur $\frac{L}{2n}$, ont des directions fixes. Si le point A_{2p+1} se trouve dans un carré K (contour compris), les points A_{2p} et A_{2p+2} se trouvent dans K ou dans l'un des 8 carrés qui ont avec K au moins un point commun; on peut enfermer les deux arcs de Γ d'extrémités A_{2p+1} dans

un domaine formé de 9 carrés et, par suite, on peut enfermer Γ dans un domaine formé de $9n$ carrés. L'aire de ce domaine est

$$9n \cdot \frac{L^2}{4n^2} = \frac{9L^2}{4n}.$$

Elle peut être rendue aussi petite que l'on veut, moyennant un choix convenable de n. La démonstration précédente s'applique à une courbe fermée. En tenant compte du n° **90**, 1° du tome II on obtient :

THÉORÈME. — **Si une courbe fermée simple continue du plan est rectifiable, son intérieur est quarrable.**

II. RECTIFICATION D'UNE COURBE PLANE OU GAUCHE

113. *Abscisse curviligne.* — 1° DÉFINITION. — **Si M_0 et M_1 sont deux points de l'arc simple rectifiable Γ, orienté, on appelle mesure algébrique du sous-arc de Γ dont l'origine est M_0 et dont l'extrémité est M_1 le nombre réel qui a pour valeur absolue la longueur de l'arc $\widehat{M_0M_1}$ et pour signe + ou — suivant que M_0 est *avant* ou *après* M_1 sur l'arc orienté. On représente ce nombre par la notation** $\overline{\text{arc } M_0M_1}$.

Sur un axe orienté, le théorème de Chasles est démontré à partir de la relation d'ordre et de la définition de la mesure algébrique d'un segment orienté. La démonstration reste valable sur un arc simple rectifiable orienté : il suffit de remplacer $\overline{M_0M_1}$ par $\overline{\text{arc } M_0M_1}$.

DÉFINITION II. — **Si I est un point arbitrairement choisi pour origine sur l'arc simple rectifiable Γ, orienté, on appelle abscisse curviligne d'un point quelconque de Γ le nombre algébrique**

$$s(M) = \overline{\text{arc IM}}.$$

La correspondance entre M et s est biunivoque.

La formule de Chasles permet d'écrire

$$\overline{\text{arc } M_0M_1} = s(M_1) - s(M_0).$$

2° **Expression de l'abscisse curviligne.** — Limitons-nous au cas où Γ est un arc simple continu, continûment dérivable, défini par la représentation biunivoque $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u)$, $u \in [a, b]$.

Orientons Γ et choisissons une origine I, définie par $\overrightarrow{OI} = \vec{F}(u_0)$. L'abscisse curviligne $s(M)$ peut s'écrire aussi $s(u)$; s est une fonction de u croissante (resp. décroissante) si Γ a été orienté dans le sens des u croissants (resp. décroissants).

Autrement dit, pour $M \neq I$, c'est-à-dire $u \neq u_0$, nous avons

$$\operatorname{sgn} s(u) = \operatorname{sgn}[\varepsilon(u - u_0)]$$

avec $\varepsilon = +1$ (resp -1) si Γ est orientée dans le sens des u croissants (resp. décroissants).

Comme, par ailleurs, le théorème du n° 110 permet d'écrire

$$|s(u)| = \left| \int_{u_0}^{u} \left\| \vec{F}'(\theta) \right\| d\theta \right|$$

nous avons :

$$\boxed{s(u) = \varepsilon \int_{u_0}^{u} \left\| \vec{F}'(\theta) \right\| d\theta} \qquad (1)$$

La fonction $s(u)$ admet donc la dérivée

$$\frac{ds}{du} = \varepsilon \left\| \vec{F}'(u) \right\|. \qquad (2)$$

REMARQUE : $\dfrac{ds}{du} = 0 \iff \vec{F}'(u) = \vec{0} \iff M(u)$ *est stationnaire sur* Γ.

3° **Différentielle de l'abscisse curviligne.** — Quelle que soit l'orientation, la formule (2), indépendante de l'origine des abscisses curvilignes, donne

$$ds^2 = \left\| \vec{F}'(u) \right\|^2 du^2.$$

Le plan métrique $\mathcal{E}_2$ étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé

$$\vec{F}(u) = x\vec{i} + y\vec{j}$$
$$x = f(u), \quad y = g(u)$$

L'espace métrique $\mathcal{E}_3$ étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé

$$\vec{F}(u) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$x = f(u), \quad y = g(u), \quad z = h(u)$$

les fonctions scalaires f, g, h étant continûment dérivables,

$$s(u) = \varepsilon \int_{u_0}^{u} \sqrt{f'^2(\theta) + g'^2(\theta)}\, d\theta$$
$$ds^2 = [f'^2(u) + g'^2(u)]\, du^2$$

$$s(u) = \varepsilon \int_{u_0}^{u} \sqrt{f'^2(\theta) + g'^2(\theta) + h'^2(\theta)}\, d\theta$$
$$ds^2 = [f'^2(u) + g'^2(u) + h'^2(u)]\, du^2$$

Étant donné que $f'(u)\, du$ est la différentielle de x, etc., nous pouvons écrire la formule fondamentale

$$\boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2} \qquad \boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

114. *Utilisation de l'abscisse curviligne pour représenter paramétriquement un arc rectifiable.* — 1° Les notations sont celles du n° 113 à cela près que, plus généralement, Γ est l'image d'un arc géométrique simple $\mathcal{A}$ de classe C^k, $(k \geqslant 1)$, dont $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u)$, $u \in [a, b]$ est un paramétrage admissible. L'abscisse curviligne

$$s(u) = \varepsilon \int_{u_0}^{u} \left\| \vec{F}'(0) \right\| d\theta$$

est une application $u \longrightarrow s = \varphi(u)$ de $[a, b]$ dans R admettant la dérivée

$\varphi'(u) = \varepsilon \| \vec{F}'(u) \|$, donc une application strictement monotone, qui admet une application réciproque $s \longrightarrow u = \varphi^{-1}(s)$, définie sur $[\varphi(a), \varphi(b)]$.

La dérivabilité de φ^{-1} au point s est conditionnée par la non-nullité de $\varphi'(u)$ au point $u = \varphi^{-1}(s)$, ce qui nous conduit à nous limiter au cas où Γ ne contient aucun point stationnaire, c'est-à-dire au cas où $\vec{F}'$ ne prend pas la valeur $\vec{0}$. On démontre alors que l'application φ est de classe C^k : $\varphi'(u)$ n'étant pas nul, les dérivées successives peuvent s'obtenir en dérivant successivement

$$\varphi'^2(u) = \vec{F}'(u).\vec{F}'(u) \qquad \text{d'où} \qquad \varphi'(u)\,\varphi''(u) = \vec{F}'(u).\vec{F}''(u);$$

de même $$\varphi''^2 + \varphi'\varphi''' = \left(\vec{F}''\right)^2 + \vec{F}'.\vec{F}''', \text{ etc...}$$

L'application φ^{-1} est, elle aussi, de classe C^k (II, 1°); c'est un C^k-difféomorphisme. Il en résulte qu'un autre paramétrage admissible de l'arc géométrique $\mathfrak{A}$ est

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}[\varphi^{-1}(s)] \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{OM} = \vec{G}(s), \quad s \in [\varphi(a), \varphi(b)].$$

On a :

$$\frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{d\vec{M}}{du} \cdot \frac{du}{ds} \qquad \left(\frac{ds}{du} \neq 0\right).$$

Compte tenu de $\left\| \frac{d\vec{M}}{du} \right\| = \left\| \vec{F}'(u) \right\|$ et de $\left| \frac{du}{ds} \right| = \frac{1}{\left\| \vec{F}'(u) \right\|}$, on constate que $\frac{d\vec{M}}{ds}$ est un vecteur unitaire.

Enfin nous savons (14) que, en un point non stationnaire M de la courbe Γ définie paramétriquement par $\overrightarrow{OM} = \vec{G}(s)$, le vecteur $\frac{d\vec{M}}{ds}$ et l'arc de Γ correspondant au segment $[s, s + \alpha]$ sont, pourvu que α soit un nombre positif suffisamment petit, du même côté de tout plan P qui passe par M et qui ne contient pas la tangente $M\tau$, en M, à Γ. Nous convlendrons d'orienter la droite $M\tau$ par le vecteur $\frac{d\vec{M}}{ds}$ et de dire que cette orientation de la tangente est l'orientation conforme à celle de la courbe. Finalement, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **En un point non stationnaire M d'un arc simple continûment dérivable Γ, orienté, la dérivée géométrique du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport à l'abscisse curviligne est un vecteur unitaire tangent à l'arc, que l'on désigne par $\vec{T}$. L'orientation définie par $\vec{T}$ sur la tangente en M à Γ est dite conforme à l'orientation de la courbe.**

En abrégé, on dit que $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}$ est le vecteur unitaire de la tangente orientée en M.

REMARQUE. — Revenant à un paramétrage quelconque $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u)$ de l'arc orienté Γ, nous avons

$$\frac{d\vec{M}}{du} = \frac{d\vec{M}}{ds} \cdot \frac{ds}{du} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\vec{M}}{du} = \vec{T} \cdot \frac{ds}{du}$$

ce qui montre que *le vecteur* $\frac{d\vec{M}}{du}$ *a pour mesure algébrique* $\frac{ds}{du}$ *sur la tangente orientée.*

2° **Formule d'Huyghens.** — Soit Γ et Γ_1 les arcs continûment dérivables définis paramétriquement par

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u), \qquad \overrightarrow{OM_1} = \vec{F}_1(u).$$

Orientons Γ et Γ_1, chacun dans un sens quelconque, soit s et s_1 les abscisses curvilignes respectives de M et de M_1 sur Γ et Γ_1, et soit

$$\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}, \qquad \vec{T}_1 = \frac{d\vec{M}_1}{ds_1}$$

les vecteurs unitaires des tangentes orientées en M et M_1 à Γ et Γ_1. Orientons le support de MM_1 par le vecteur unitaire $\vec{\delta}$, et posons $\overline{MM_1} = l$, $\sigma = (\vec{\delta}, \vec{T})$, $\sigma_1 = (\vec{\delta}, \vec{T}_1)$

$$l^2 = (\overrightarrow{MM_1})^2 \Longrightarrow l\,dl = \overrightarrow{MM_1} \cdot (d\vec{M}_1 - d\vec{M})$$

et en remplaçant $d\vec{M}$ et $d\vec{M}_1$ par $\vec{T}\,ds$ et $\vec{T}_1 ds_1$,

$$dl = ds_1 \cdot \cos\sigma_1 - ds \cdot \cos\sigma.$$

Cette formule — due à Huyghens — est indépendante des orientations choisies sur Γ et Γ_1.

3° **Application aux courbes planes.** — *a*) *Si* Γ *est représentée paramétriquement* par les formules du n° 113, 3°, le repère étant orthonormé, appelons φ l'angle polaire de la tangente orientée à Γ orientée :

$$\varphi = (\vec{Ox}, \vec{T}) \qquad \text{mod. } 2\pi.$$

Les coordonnées de $\vec{T}$ sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, et aussi $\cos\varphi$, $\sin\varphi$:

$$\boxed{\frac{dx}{ds} = \cos\varphi \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi}$$

ou encore

$$\boxed{dx = \cos\varphi . ds, \qquad dy = \sin\varphi . ds}$$

b) *Si* Γ *est représentée en coordonnées polaires,* soit $\vec{u}$ et $\vec{p}$ les vecteurs unitaires de l'axe OX d'angle polaire θ, et de l'axe OY d'angle polaire $\theta + \frac{\pi}{2}$.

Nous savons (n° 5, 5°) que

$$d\vec{M} = \vec{u}.dr + \vec{p}.rd\theta.$$

Par suite

$$\vec{T} = \vec{u}.\frac{dr}{ds} + \vec{p}.r\frac{d\theta}{ds}.$$

On en déduit

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad \boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.}$$

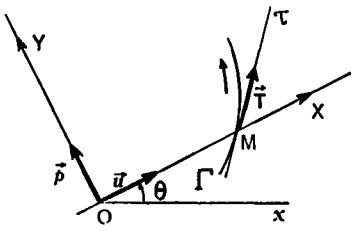


FIG. 109.

En posant $\psi = (\overrightarrow{OX}, \vec{T})$ mod. 2π,

les coordonnées de $\vec{T}$ dans le repère OX, OY

sont $\boxed{\frac{dr}{ds} = \cos\psi, \qquad r\frac{d\theta}{ds} = \sin\psi}$

on en déduit

$$\boxed{dr = \cos\psi.ds, \qquad rd\theta = \sin\psi.ds.}$$

Par division on retrouve la formule

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{rd\theta}{dr} \qquad \text{(n° 40).}$$

4° **Application aux courbes gauches.** — *a) Si* Γ *est représentée paramétriquement* par les formules du n° 113, 3°, le repère étant orthonormé, on désigne par α, β, γ les coordonnées du vecteur $\vec{T}$, c'est-à-dire les cosinus directeurs de la tangente orientée à Γ orientée; ces coordonnées sont aussi les dérivées de x, y, z par rapport à l'abscisse curviligne s :

$$\boxed{\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}.}$$

b) Si Γ *est représentée en coordonnées cylindriques,*

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u}.r + \vec{k}.z,$$

$$d\vec{M} = \vec{u}.dr + \vec{p}.rd\theta + \vec{k}.dz,$$

et par suite

$$\vec{T} = \vec{u}.\frac{dr}{ds} + \vec{p}.r\frac{d\theta}{ds} + \vec{k}.\frac{dz}{ds}$$

donne les cosinus directeurs de la tangente orientée à Γ dans le repère mobile OXYz.

On en déduit

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2.}$$

115. *Pratique de la rectification.* — Calculer la longueur d'un arc Γ s'appelle *rectifier* cet arc, ou faire la rectification de l'arc Γ.

1° L'arc continûment dérivable Γ est donné, dans un repère orthonormé, par une représentation paramétrique $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u)$,

dans le plan	dans l'espace
$\begin{cases} x = f(u) \\ y = g(u) \end{cases}$	$\begin{cases} x = f(u) \\ y = g(u) \\ z = h(u) \end{cases}$

f, g, h étant des fonctions scalaires à dérivées continues.

On calcule d'abord le carré ds^2 de la différentielle de l'abscisse curviligne

$ds^2 = dx^2 + dy^2$	$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
En coordonnées polaires	En coordonnées cylindriques
$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$	$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$.

2° On obtient ainsi pour ds^2 une expression de la forme $ds^2 = \Phi(u).du^2$; on en déduit $ds = \varepsilon\sqrt{\Phi(u)}du$, ε étant $+1$ ou -1 suivant le sens positif choisi sur Γ.

Si Γ présente un point stationnaire, en ce point $\frac{ds}{du} = 0$, et s'il existe une fonction $\Psi(u)$ telle que $\Psi^2(u) = \Phi(u)$, la fonction Ψ s'exprimant sans le signe $\sqrt{\ }$, il peut arriver que $\Psi(u)$ s'annule en changeant de signe. Pratiquement il conviendra de rectifier séparément les arcs limités par des points stationnaires.

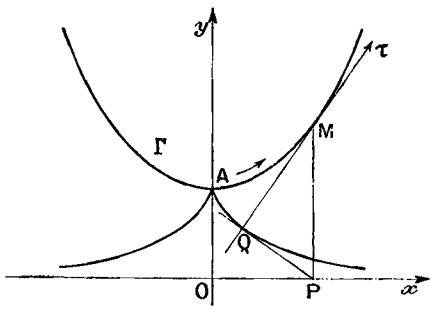


FIG. 110.

3° EXEMPLES. — *a) Rectification d'une chaînette* (fig. 110). — Soit $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$ l'équation de la chaînette Γ. Prenons pour origine sur Γ le point A dont l'abscisse est $x = 0$, et orientons Γ conformément au sens des x croissants; évaluons l'abscisse curviligne s = arc AM du point M d'abscisse x.

$$dy = \operatorname{sh}\frac{x}{a}dx \qquad \text{d'où} \qquad ds^2 = dx^2 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}dx^2 = \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}dx^2.$$

Puisque $\frac{dx}{ds}$ doit être positif,

$$ds = \operatorname{ch}\frac{x}{a}dx \qquad \text{d'où} \qquad s = \int_0^x \operatorname{ch}\frac{x}{a}dx = a\operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$

On déduit du calcul précédent l'angle polaire φ de la tangente orientée en M à Γ; il est déterminé par les formules

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}, \qquad \sin\varphi = \frac{dy}{ds} = \operatorname{th}\frac{x}{a}.$$

Si P est la projection orthogonale de M sur Ox, Q celle de P sur la tangente en M, en supposant $x > 0$, on a

$$PQ = MP\cos\varphi = a, \qquad MQ = MP\sin\varphi = s = \text{arc AM}.$$

b) Rectification d'une cycloïde. — Soit

$$x = a(u - \sin u), \qquad y = a(1 - \cos u)$$

la représentation paramétrique usuelle de la cycloïde Γ (fig. 111), a étant positif;

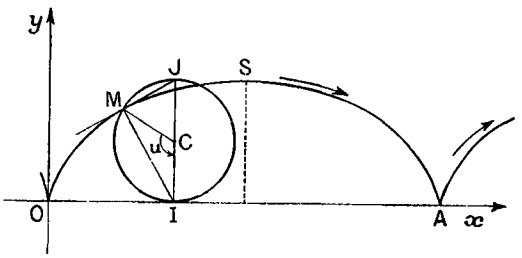


FIG. 111.

$$dx = a(1 - \cos u)\,du,$$
$$dy = a\sin u\,du$$

d'où $\quad ds^2 = 4a^2\sin^2\frac{u}{2}\,du^2.$

On constate que $\frac{ds}{du}$ s'annule avec $\sin\frac{u}{2}$, soit pour $u = 2k\pi$; à ces valeurs correspondent les points de rebroussement de la cycloïde. Orlentons la courbe dans le sens des u croissants; $\frac{ds}{du}$ doit être positif; or pour $0 < u < 2\pi$, $\sin\frac{u}{2}$ est positif. Par suite, sur la première arche, $\quad ds = 2a\sin\frac{u}{2}\,du,$

et l'arc OM a pour longueur

$$s = \int_0^u 2a\sin\frac{u}{2}\,du = 4a\left(1 - \cos\frac{u}{2}\right) \qquad (0 < u < 2\pi).$$

La longueur de l'arche OA est quatre fois celle du diamètre du cercle générateur.

Si φ est l'angle polaire de la tangente orientée en M,

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds} = \sin\frac{u}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{dy}{ds} = \cos\frac{u}{2}$$

d'où $\qquad \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}, \qquad \mod 2\pi.$

REMARQUE : Pour $2\pi < u < 4\pi$, $\sin\frac{u}{2}$ est négatif. Par suite, sur la seconde arche $ds = -2a\sin\frac{u}{2}\,du$, $\cos\varphi = -\sin\frac{u}{2}$, $\sin\varphi = -\cos\frac{u}{2}$, et $\varphi = \frac{3\pi}{2} - \frac{u}{2}$, $\mod 2\pi$.

c) Rectification de la cardioïde. — Soit $r = a(1 + \cos\theta)$ une équation polaire de la cardioïde Γ; orlentons cette courbe dans le sens des θ croissants. En faisant varier θ de $-\pi$ à $+\pi$ nous obtiendrons toute la courbe. Formons

$$dr = -a\sin\theta\,d\theta, \qquad ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta^2$$

et, puisque dans l'intervalle considéré $\cos\frac{\theta}{2}$ reste positif, en supposant a positif, on a

$$ds = 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta.$$

Si nous prenons pour orlgine sur Γ le point dont l'angle polaire est 0, l'abscisse curvillgne du point $M(\theta, r)$ est

$$s = \int_0^\theta 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 4a\sin\frac{\theta}{2}, \qquad (-\pi < \theta < +\pi)$$

la longueur totale de la cardioïde est $8a$. Si ψ est l'angle de l'axe OX défini par l'angle polaire θ avec la tangente orientée,

$$\cos\psi = \frac{dr}{ds} = -\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \sin\psi = r\frac{d\theta}{ds} = \cos\frac{\theta}{2},$$

d'où $\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$ à $2k\pi$ près. La tangente orientée a pour angle polaire $\varphi = \theta + \psi$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2}, \qquad \text{mod. } 2\pi.$$

d) La courbe Γ définie par

$$x = \int_0^u \frac{\lambda - 1}{\lambda^2 + 1}\, d\lambda, \qquad y = \int_0^u \frac{\lambda(\lambda - 1)}{\lambda^2 + 1}\, d\lambda$$

passe par l'origine O, pour $u = 0$; on oriente Γ dans le sens des u croissants, on prend O pour origine des abscisses curvilignes, et on demande de calculer l'abscisse curviligne s du point $M(u)$.

$$\frac{dx}{du} = \frac{u - 1}{u^2 + 1}, \qquad \frac{dy}{du} = \frac{u(u - 1)}{u^2 + 1},$$

$$ds^2 = \frac{(u-1)^2}{u^2+1}\, du^2 \implies ds = \frac{|u - 1|}{\sqrt{u^2 + 1}}\, du,$$

puisque, par convention, $\frac{ds}{du}$ doit être positif.

Si $u < 1$, $\quad s = \int_0^u \frac{1 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}\, d\lambda = \text{Argsh}u - \sqrt{u^2 + 1} + 1.$

Le point $A(u = 1)$ est un point de rebroussement pour Γ, et

$$\overset{\frown}{\text{arc OA}} = \text{Argsh } 1 - (\sqrt{2} - 1).$$

Si $u > 1$, $\quad s = \int_0^1 \frac{1 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}\, d\lambda + \int_1^u \frac{\lambda - 1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}\, d\lambda$

$$s = \sqrt{u^2 + 1} - \text{Argsh}u + 2(\text{Argsh } 1 - \sqrt{2}) + 1.$$

III. COURBURE DES COURBES PLANES

Dans ce sous-chapitre, nous nous plaçons dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_2$ rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Par courbe Γ, nous entendons l'image Γ d'un arc géométrique simple orienté $\mathcal{A}$ de classe C^k $(k \geqslant 2)$, initialement donné par le paramétrage admissible

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(u) = \vec{i}\, f(u) + \vec{j}\, g(u), \quad u \in \mathcal{I}, \ \mathcal{I} \text{ segment réel.}$$

Dans la mesure où Γ ne contient aucun point stationnaire, ce que nous supposons, nous savons (114) que nous disposons du paramétrage admissible $\overrightarrow{OM} = \vec{G}(s)$, dans lequel s est l'abscisse curviligne.

116. *Introduction de la notion de courbure.* — 1° La notion physique de courbure d'un virage est une notion indispensable à quiconque conduit une voiture automobile; intuitivement, cette courbure est d'autant plus grande (et par suite dangereuse) que :

a) la longueur du chemin parcouru au cours du virage est plus petite;

b) la mesure de l'angle dont on a varié la direction du véhicule au cours du virage est plus grande.

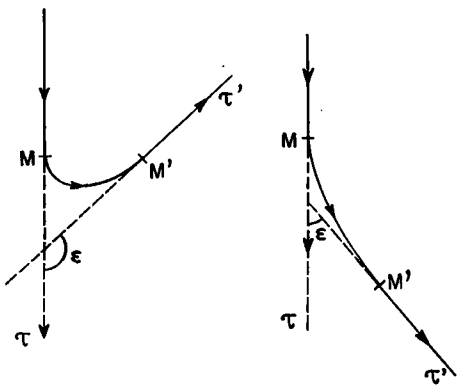


FIG. 112.

La figure 112 met en évidence l'angle ε des tangentes orientées $\overrightarrow{M\tau}$ et $\overrightarrow{M'\tau'}$ dans le sens du mouvement, au début et à la fin du virage.

2° On est ainsi conduit aux définitions suivantes : Étant donné un arc simple continu $\overset{\frown}{MM'}$ appartenant à une courbe orientée Γ, on appelle *angle de contingence* de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ l'angle géométrique des tangentes orientées en M et M' à Γ et *courbure moyenne* de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ le rapport

$$\frac{\varepsilon}{\text{arc } MM'}$$

de la mesure ε en radians de l'angle de contingence (comprise entre 0 et π) à la longueur de l'arc.

Dans le cas particulier où l'arc MM' appartient à un cercle de rayon R (fig. 113), nous constatons que la courbure moyenne n'est autre que l'inverse du rayon.

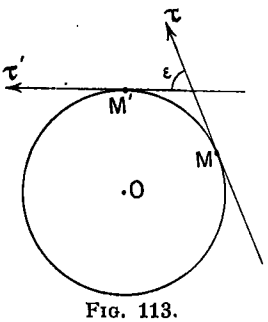


FIG. 113.

Étudions ce que devient la courbure moyenne lorsque, M étant fixe, M' tend vers M en décrivant Γ. Appelons s et $s + \Delta s$ les abscisses curvilignes des points M et M' sur la courbe Γ orientée : la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ est $|\Delta s|$.

Appelons φ et $\varphi + \Delta\varphi$ les angles polaires des tangentes orientées $\overrightarrow{M\tau}$ et $\overrightarrow{M'\tau'}$ en M et M' à Γ :

$$\Delta\varphi = \left(\overrightarrow{M\tau}, \overrightarrow{M'\tau'}\right) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = |\Delta\varphi|.$$

La courbure moyenne de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ a pour expression $\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$; lorsque M' tend vers M en décrivant Γ, $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ a une limite, la dérivée de φ par rapport à s (un calcul ultérieur (119) montrera que cette dérivée existe dès que $\frac{d^2\vec{M}}{du^2}$ existe) la courbure moyenne a donc pour limite $\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$.

117. ***Définitions relatives à la courbure d'une courbe plane.*** — 1° **Tangente et normale orientées.** — Soit Γ une courbe plane orientée, rapportée à un repère orthonormé; s désignant l'abscisse curviligne sur Γ, $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}$ est le vecteur unitaire de la tangente orientée en M à Γ (114, 1°).

Soit $\varphi = (\vec{Ox}, \vec{T})$ *l'angle polaire de la tangente orientée en* M *à la courbe* Γ *orientée.* Nous orientons la normale en M à Γ de façon que son angle polaire soit $\varphi + \frac{\pi}{2}$. En éliminant le cas où φ serait une constante, c'est-à-dire le cas où Γ serait une droite (n° 37, 2°), nous savons (n° 5, 4°) que $\frac{d\vec{T}}{d\varphi}$ n'est autre que le

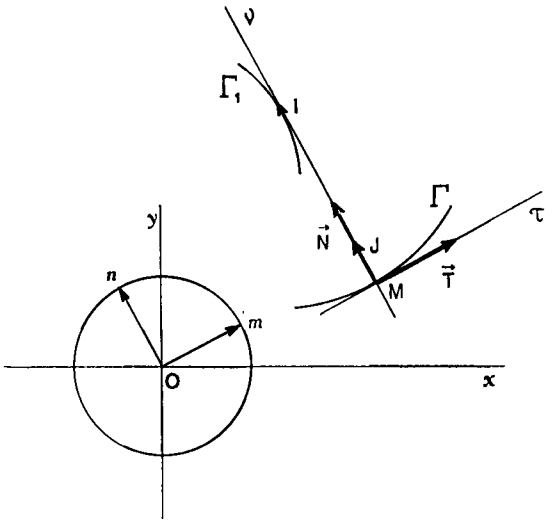


FIG. 114.

vecteur unitaire de la direction orientée par l'angle polaire $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Autrement dit, la convention précédente nous fait adopter pour vecteur unitaire de la normale orientée en M à Γ le vecteur

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{d\varphi}; \qquad (\vec{Ox}, \vec{N}) = \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

Notons que

$$\frac{d\vec{N}}{d\varphi} = -\vec{T};$$

$$\vec{T} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi; \qquad \vec{N} = \vec{i}\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \vec{j}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

REMARQUE. — Pour harmoniser les études de la courbure dans le plan et dans l'espace, nous serons amenés à considérer le point m déterminé par $\vec{Om} = \vec{T}$ et à remarquer que φ est l'abscisse curviligne de m sur le cercle J de centre O, de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique.

2° **Courbure algébrique. Vecteur-courbure.** — Étudions le vecteur $\frac{d\vec{T}}{ds}$, qui n'est autre que $\frac{d^2\vec{M}}{ds^2}$. Nous avons, d'après le 1°,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}\vec{N}.$$

Nous sommes ainsi conduits à énoncer :

DÉFINITION I. — **Soit Γ une courbe plane orientée, s l'abscisse curviligne du point M de Γ et φ l'angle polaire de la tangente en M, orientée. On appelle courbure algébrique de Γ au point M le rapport $\frac{d\varphi}{ds}$.**

DÉFINITION II. — **On appelle vecteur-courbure de la courbe Γ au point M le vecteur d'origine M équipollent à la dérivée seconde du vecteur-espace $\overrightarrow{OM}$ par rapport à l'abscisse curviligne s, soit**

$$\overrightarrow{MJ} = \frac{d^2\overrightarrow{M}}{ds^2} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{MJ} = \frac{d\overrightarrow{T}}{ds}.$$

La relation $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}\overrightarrow{N}$ s'énonce :

PROPRIÉTÉ I. — **Le vecteur-courbure de Γ au point M est normal en M à la courbe; sa mesure algébrique sur la normale orientée est la courbure algébrique $\frac{d\varphi}{ds}$.**

3° Rayon de courbure algébrique. — Pour le physicien, la courbure moyenne d'un arc est le quotient d'un angle par une longueur; elle admet la dimension L^{-1}; son inverse a la dimension L, ce qui conduit à la définition suivante :

DÉFINITION III. — **On appelle rayon de courbure algébrique de la courbe Γ au point M l'inverse de la courbure algébrique en ce point, soit**

$$\mathcal{R} = \frac{ds}{d\varphi}.$$

La relation $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}\overrightarrow{N}$ s'énonce :

PROPRIÉTÉ II. — **La mesure algébrique du vecteur-courbure à l'aide du vecteur unitaire $\overrightarrow{N}$ de la normale orientée au point M est $\frac{1}{\mathcal{R}}$, soit**

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{\overrightarrow{N}}{\mathcal{R}} \text{ (première formule de Frenet).}$$

Remarquons que $\frac{d\overrightarrow{N}}{d\varphi} = -\overrightarrow{T}$ et $\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{d\overrightarrow{N}}{d\varphi}$

entraînent $\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\frac{\overrightarrow{T}}{\mathcal{R}}$ (deuxième formule de Frenet).

4° **Centre de courbure.** — Le vecteur $\overrightarrow{MJ} = \frac{d^2\overrightarrow{M}}{ds^2}$, qui s'écrit $\frac{1}{\mathcal{R}}\overrightarrow{N}$, étant situé dans la concavité de Γ en M, et étant de ce fait indépendant de l'orientation de Γ, il en est de même pour le vecteur $\overrightarrow{MI} = \mathcal{R}\overrightarrow{N}$, puisque $\overrightarrow{MI} = \mathcal{R}^2\overrightarrow{MJ}$. Nous sommes ainsi conduits à énoncer :

DÉFINITION IV. — **On appelle centre de courbure de Γ en M le point I défini sur la normale en M par**

$$\overrightarrow{MI} = \mathcal{R}\overrightarrow{N} \qquad \text{avec} \qquad \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{N}\right) = \varphi + \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{R} = \frac{ds}{d\varphi}.$$

PROPRIÉTÉ III. — **Le centre de courbure de Γ en M est situé dans la concavité de Γ en M.**

REMARQUES. — I. Le fait que $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{\mathcal{R}}\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{MI} = \mathcal{R}\overrightarrow{N}$ ne dépendent pas du choix de l'orientation de Γ s'explique ainsi.

Changeons l'orientation initiale choisie sur Γ; le tableau suivant montre ce que deviennent les éléments géométriques introduits dans l'étude précédente

orientation initiale	orientation opposée
$\overrightarrow{T}$	$-\overrightarrow{T}$
φ et $d\varphi$	$\varphi + \pi$ et $d\varphi$
s et ds	$-s$ et $-ds$
$\overrightarrow{N}$	$-\overrightarrow{N}$
$\mathcal{R}$	$-\mathcal{R}$

$\overrightarrow{N}$ et $\mathcal{R}$ étant remplacés par leurs opposés, $\frac{\overrightarrow{N}}{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{R}\overrightarrow{N}$ restent invariants.

II. Pour l'observateur qui est debout, en M, sur le plan de Γ et qui regarde vers $\overrightarrow{T}$, le vecteur $\overrightarrow{N}$ est à gauche (fig. 114). Les vecteurs $\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MI}$ sont à gauche ou à droite suivant que $\frac{ds}{d\varphi}$ est positif ou négatif. Ainsi la concavité de Γ est tournée vers la gauche ou la droite de l'observateur suivant que $\mathcal{R}$ est positif ou négatif.

118. ***Lieu des centres de courbure.*** — 1° Le centre de courbure de Γ en M est le point I déterminé par l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + \mathcal{R}\overrightarrow{N} \tag{1}$$

$$(1) \Longrightarrow \quad d\overrightarrow{I} = d\overrightarrow{M} + \mathcal{R}d\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N}.d\mathcal{R}. \tag{2}$$